مدل سازی جریان رودخانه دز با استفاده از مدل فرآیند پواسن فیلترشده

صغری بهلوری حجار[۱]، غلامعلی پرهام [۲]

چکیده

در این مقاله به مدل سازی شدت جریان رودخانه دز با استفاده از فرآیند پواسن فیلترشده می پردازیم. ابتدا حالت کلی را بـرای فرآیند در نظر گرفته و خواص نظری آن را به دست می آوریم، سپس با توجه به قدرمطلق تفاضل بین ضرایب همبستگی نمونـه ای و نظری، مدلی مناسب برای داده های جریان رودخانه انتخاب کرده و به ارزیابی مدل می پردازیم.

واژه های کلیدی : فرآیند پواسن فیلترشده، مدل سازی، شدت جریان، رودخانه دز.

۱– مقدمه

فرض کنید $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پوآسن با پارامتر $\lambda > 0$ و $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ یک مجموعه از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل باشند، همچنین فرض کنید Y_n ها مستقل از فرآیند پواسن $N(t)$ باشند. فرآیند تصادفی $X(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} W(t, \tau_n, Y_n), \qquad (۱)$$

به طوری که τ_n ها زمان های رخداد فرآیند پواسن هستند. $X(t)$ به فرآیند پواسن فیلترشده معروف است. تابع $W(.,.,.)$ تابع پاسخ نامیده می شود (اگر $N(t)=0$ آنگاه $X(t)=0$). یون و کاواس[۵] از فرآیند پواسن فیلترشده برای مدل سازی بارش تصادفی، راهمن و گریگریو[٤] از این فرآیند برای مدل سازی خطر زمین لرزه استفاده کرده اند. همچنین لیفبور[۲] از این فرآیند برای مدل سازی جریان رودخانه دلیور استفاده کرده است.

هدف از این مقاله مدل سازی شدت جریان رودخانه دز با استفاده از فرآیند پواسن فیلتر شده است. داده ها از حوزه آبریز سد دزدر ۲۳ کیلومتری شمال اندیمشک طی سالهای ۱۳۸۰ تا ۱۳۸٦ و به صورت روزانه جمع آوری شده است.

یک شکل مناسب و کلی برای تابع پاسخ که غالبا برای مدل بندی شدت جریان رودخانه بکار می رود، به صورت زیر است:

$$W(t, \tau_n, Y_n) = Y_n (t - \tau_n)^k e^{-\frac{(t-\tau_n)}{c}}, \qquad (۲)$$

که در آن ثابتی c است که براساس داده های شدت جریان رودخانه باید برآورد گردد. در زمان τ_n اتفاقی به اندازه Y_n شدت جریان را ماکسیمم می کند، سپس به فرم $(t-\tau_n)^k e^{-\frac{(t-\tau_n)}{c}}$ که تابعی نمایی است کاهش می یابد. یادآوری می کنیم که هیدروگراف ها دارای چنین ساختاری هستند. در این جا به بررسی خواص مدل در حالت کلی پرداخته، مدل را برای $k = 0,1$ به داده ها برازش داده و پارامترهای آن را برآورد می کنیم. با انتخاب مدل مناسب به مساله پیش بینی شدت جریان و ارزیابی مدل می پردازیم.

۲– خواص نظری فرآیند پواسن فیلترشده

در این بخش امید ریاضی، واریانس، کوواریانس، مقادیر جانبی و امید ریاضی شرطی $X(t)$ بررسی خواهد شد.

---

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه شهید چمران اهواز

[۲] دانشیار دانشگاه شهید چمران اهواز

۲-۱- امید ریاضی $X(t)$

ابتدا امید ریاضی $X(t)$ را محاسبه می کنیم. در حالت کلی، می توان نوشت [۳] صفحه ۱۴۷):

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t E[W(t,\tau,Y)]d\tau,$$

که در آن Y متغیری تصادفی هم توزیع با Y_nها است. برای مدل مورد نظرداریم:

$$E[X(t)] = \lambda \int_0^t Y_n\,(t-\tau_n)^k e^{\frac{(t-\tau_n)}{c}} d\tau$$
$$= \lambda E(Y) \int_0^t (t-\tau_n)^k e^{\frac{-(t-\tau_n)}{c}} d\tau.$$

اگر Y را توزیع نمایی با پارامتر μ فرض کنیم، آنگاه

$$E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu}\int_0^t (t-\tau_n)^k e^{-\frac{(t-\tau_n)}{c}} d\tau.$$

توجه: در کاربردها توزیع دقیق Y_n مورد نیاز نیست و مشخص بودن امید ریاضی آن کفایت می کند.

قضیه: اگر $k \in (-1,\infty)$ باشد، آنگاه امید ریاضی $X(t)$ برابر است با :

$$E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu} c^{k+1} \gamma(k+1, \frac{t}{c}),$$

که $\gamma(.,.)$ تابع گامای ناکامل است.

اگر $k \in \{0,1,...\}$ باشد، داریم:

$$E[X(t)] = \frac{\lambda}{\mu} c^{k+1} k! [1 - e^{-\frac{t}{c}} \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} (\frac{t}{c})^m].$$

و برای حالت خاص داریم :

$$E[X(t)] = \begin{cases} \frac{\lambda c}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{t}{c}}\right) ; & k = 0, \\ \frac{\lambda c}{\mu}\left[c - (t-c)e^{-\frac{t}{c}}\right]; & k = 1. \end{cases}$$

۲-۲- واریانس $X(t)$

برای واریانس $X(t)$ با استفاده از[۳] صفحه ۱۴۷، خواهیم داشت:

$$Var[X(t)] = \lambda \int_0^t E[W^2(t,\tau_n,Y_n)] d\tau.$$

با استفاده از این واقعیت (Y دارای توزیع نمایی با پارامتر μ) که $E[Y^2] = \frac{2}{\mu^2}$ می توان نوشت:

$$Var[X(t)] = \frac{\lambda^2}{\mu^2} \int_0^t (t-\tau_n)^{2k} e^{-\frac{2(t-\tau_n)}{c}} d\tau.$$

با انجام محاسباتی شبیه آن چه برای امید ریاضی انجام شد، داریم:

$$Var[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2} (\frac{c}{2})^{2k+1} \gamma(2k+1, \frac{2t}{c}); \quad k > -\frac{1}{2}.$$

با انتگرال گیری جزبه جز خواهیم داشت:

$$Var[X(t)] = \frac{2\lambda}{\mu^2} (\frac{c}{2})^{2k+1} (2k)! [1 - e^{-\frac{2t}{c}} \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{m!} (\frac{2t}{c})^m],$$

به طوری که $2k \in \{0,1,...\}$ و در حالت خاص برای $k = 0$ داریم:

$$Var[X(t)] = \frac{\lambda c}{\mu^2} (1 - e^{-\frac{2t}{c}}),$$

همچنین برای $k = 1$ داریم:

$$Var[X(t)] = \frac{\lambda c}{\mu^2} [\frac{c^2}{2} - (t + ct + \frac{c^2}{2}) e^{-\frac{2t}{c}}).$$

۲-۳- محاسبه کواریانس

به طور صریح می توان کواریانس $X(t_1)$ و $X(t_2)$ را حساب کرد.

قضیه : اگر $t_1 \le t_2$ کواریانس $X(t_1)$ و $X(t_2)$ به صورت زیر است:

$$Cov[X(t_1), X(t_2)] = \frac{\lambda}{\mu^2} c e^{-\frac{t_1+t_2}{c}} (t_1 t_2)^k \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu I_\nu,$$

که در آن

$$I_\nu := \gamma(\nu+1, -2\frac{t_1}{c})$$
$$= \nu! [1 - e^{-\frac{2t_1}{c}} \sum_{m=0}^{\nu} \frac{(-1)^m}{m!} (\frac{2t_1}{c})^m],$$
$$c_\nu := (\frac{c}{2t_2})^\nu \sum_{j=0}^{\nu} (\frac{t_2}{t_1})^j \binom{k}{j} \binom{k}{\nu - j},$$

به طوری که $k \in \{0,1,...\}$.

۲-۴- مقادیر مجانبی

برآورد پارامترهای مجهول مدل، یعنی λ, μ و c امید ریاضی و واریانس $X(t)$ را وقتی که t به سمت بی نهایت میل کند، یعنی فرآیند در حالت مجانبی است، حساب می

کنیم. در کاربردها فرض می کنیم فرآیند مدت زمان کافی کار کرده است. با استفاده از این واقعیت داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha).$$

همچنین برای امید ریاضی، واریانس و کواریانس فرآیند خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to\infty}Var[X(t)]=\frac{2\lambda}{\mu^2}(\frac{c}{2})^{2k+1}\Gamma(2k+1),$$

$$\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\frac{\lambda}{\mu}c^{k+1}\Gamma(k+1),$$

$$\lim_{t\to\infty}Cov[X(t)]=\frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}\mu^2}(\frac{\delta c}{2})^{k+\frac{1}{2}}\Gamma(k+1)K_{k+\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{c}),$$

که $k>-\frac{1}{2}$ و $K_k(.)$ تابع بسل اصلاح شده است([۳]صفحه ۳۷٤).

همچنین با توجه به رابطه کواریانس و ضریب همبستگی داریم:

$$\lim_{t\to\infty}\rho_{X(t),X(t+\delta)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{2\delta}{c})^{k+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+1)}K_{k+\frac{1}{2}}(\frac{\delta}{c}).$$

برای راحتی در محاسبات، با توجه به نتایج به دست آمده، مقادیر مجانبی امیدریاضی، واریانس و ضریب همبستگی به صورت زیر به دست می آیند:

$$\lim_{t\to\infty}E[X(t)]=\begin{cases}\frac{\lambda c}{\mu} ; & k=0,\\ \frac{\lambda c^2}{\mu}; & k=1.\end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty}var[X(t)]=\begin{cases}\frac{\lambda c}{\mu^2} ; & k=0,\\ \frac{\lambda c^2}{2\mu^2}; & k=1.\end{cases}$$

و

$$\lim_{t\to\infty}\rho_{X(t),X(t+\delta)}=\begin{cases}e^{\frac{-\delta}{c}} ; & k=0,\\ \left(1+\frac{\delta}{c}\right)e^{\frac{-\delta}{c}}; & k=1.\end{cases}$$

۲–۵– امید شرطی $X(t+1)$ به شرط $X(t)$

در این جا امید ریاضی مقدار مورد انتظار فرآیند در زمان $t+1$ به شرط گذشته فرآیند در $[0,t]$ را محاسبه خواهیم کرد. در مدل با $k=0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}E[X(t+1)|X(t)] \; &= \\ &E\left[\sum_{n:0\le\tau_n\le t+1}Y_ne^{-\frac{(t+1-\tau_n)}{c}}|X(t)\right]\\ &=e^{-\frac{1}{c}}E\left[\sum_{n:0\le\tau_n\le t}Y_ne^{-\frac{(t-\tau_n)}{c}}|X(t)\right]\\ &+E\left[\sum_{n:t\le\tau_n\le t+1}Y_ne^{-\frac{(t+1-\tau_n)}{c}}|X(t)\right]\\ &=e^{-\frac{1}{c}}E[X(t)|X(t)]+E[X(1)]\\ &=e^{-\frac{1}{c}}X(t)+\frac{\lambda c}{\mu}\left(1-e^{-\frac{1}{c}}\right). \qquad (۳)\end{aligned}$$

برای مدل با $k=1$ مقدار امید شرطی به دانستن اطلاعات دیگری راجع به رخدادها از جمله مقادیر τ_n ها و Y_n ها در گذشته فرآیند $[0,t]$ بستگی دارد، که در بعضی حالات می توان آنها را برآورد کرد. در بسیاری محاسبات [۱] مورد استفاده قرار گرفته است.

۳– مدل سازی و پیش بینی جریان رودخانه دز

در این بخش به مدل سازی و پیش بینی براساس مقدار روزانه جریان رودخانه دز می پردازیم.

۳–۱– داده ها

داده های مورد بررسی در این مقاله مربوط به ۲۵۵٦ مقدار روزانه جریان رودخانه دز است که از حوزه آبریز سد دز طی سال های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸٦ توسط سازمان آب وبرق استان خوزستان جمع آوری شده است. میانگین این مقادیر جریان $\bar{x}=205.5\frac{m^3}{s}$ و انحراف استاندرد آن برابر $s=46.19\frac{m^3}{s}$ است. ضریب همبستگی ۱۲۷۸ جفت جریان متوالی برابر $r=0.86$ است.

۳-۲- برآورد پارامترهای مدل

برای برآورد پارامترهای مجهول مدل λ, μ و c واز برابر قراردادن مقدار عددی به دست آمده از مشاهدات با مقادیر حدی استفاده می کنیم.

در مدل کلی با $k=0$ داریم:

$$e^{\frac{-1}{c}} = 0.86 \Rightarrow \hat{c} = 6.6,$$

$$\frac{\lambda}{\mu}(6.6) \approx 205.5,$$

$$\frac{\lambda}{\mu^2}(6.6) \approx (46.19)^2.$$

که $\hat{\lambda} = 2.29, \quad \hat{\mu} = 0.096$.

پس مدل پواسن فیلترشده با $k=0$ برای جریان رودخانه دز به صورت زیر است:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n \, e^{-\frac{(t-\tau_n)}{6.6}}; \quad t > 0. \qquad (٤)$$

(اگر $N(t)=0$ آنگاه $X(t)=0$).

برای مدل با $k=1$ نیز به طور مشابه داریم:

$$\hat{c} = 1.53, \quad \hat{\mu} = 0.147, \quad \hat{\lambda} = 12.9.$$

در نتیجه مدل می شود:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n(t-\tau_n) \, e^{-\frac{(t-\tau_n)}{1.53}}; \quad t > 0. \qquad (٥)$$

(اگر $N(t)=0$ آنگاه $X(t)=0$).

۳-۳- انتخاب مدل

برای مقایسه مدل هایی که در قسمت قبل به دست آمده، مقادیر همبستگی نظری و نمونه ای را برای هرکدام از مدل ها به دست آورده و قدرمطلق تفاضل آنها را مورد تفسیر قرار می دهیم.

δ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
$\rho(\delta)$	٠.٨٦	٠.٧٥	٠.٦٤	٠.٥٥	٠.٤٧	٠.٤١	٠.٣٥
$r(\delta)$	٠.٨٦	٠.٨٢	٠.٨١	٠.٧٨	٠.٧٧	٠.٧٥	٠.٧٥
$\|\rho(\delta)-r(\delta)\|$	٠	٠.٠٧	٠.١٧	٠.٢٣	٠.٣٠	٠.٣٤	٠.٤

جدول۱: ضرایب همبستگی نظری و نمونه ای مقادیر جریان $X(t)$ و $X(t+\delta)$ برای $\delta = 1,\dots,7$ در مدل با $k=0$

δ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
$\rho(\delta)$	٠.٨٦	٠.٦٢	٠.٤٢	٠.٢٧	٠.٤٧	٠.١٠	٠.٠٦
$r(\delta)$	٠.٨٦	٠.٨٢	٠.٨١	٠.٧٨	٠.٧٧	٠.٧٥	٠.٧٥
$\|\rho(\delta)-r(\delta)\|$	٠	٠.٢٠	٠.٣٩	٠.٢٣	٠.٦١	٠.٦٥	٠.٦٩

جدول۲: ضرایب همبستگی نظری و نمونه ای مقادیر جریان $X(t)$ و $X(t+\delta)$ برای $\delta = 1,\dots,7$ در مدل با $k=1$

در جدول ۱ مقادیر ضریب همبستگی نظری و نمونه ای برای $X(t)$ و $X(t+\delta)$ که $\delta = 1,\dots,7$ در مدل با $k=0$ آمده است. با توجه به جدول مشاهده می شود که مقادیر همبستگی نمونه ای با افزایش δ کاهش می یابد وقدرمطلق تفاضل آن ها افزایش می یابد.

جدول ۲ مقادیر ضرایب همبستگی را برای $X(t)$ و $X(t+\delta)$ برای مقادیر $\delta = 1,\dots,7$ در مدل با $k=1$ نشان می دهد. توجه می کنیم که در این مدل نیز با افزایش δ قدرمطلق تفاضل افزایش می یابد. ولی از آنجا که قدرمطلق تفاضل مقادیر همبستگی نظری و نمونه ای در مدل با $k=0$ کمتر از تفاضل در مدل با $k=1$ است، می توان نتیجه گرفت که برای رودخانه دز مدل فرآیند پواسن فیلترشده با $k=0$ مناسب تر است.

۳-۴- پیش بینی

برای پیش بینی شدت جریان در زمان های مختلف می توان از مدل استفاده کرد. همچنین با توجه به رابطه متوسط پیش بینی شدت جریان را می توان از رابطه خطی زیر را محاسبه کرد:

$$E[X(t+1) \mid X(t)] = 0.86X(t) + 28.78, \qquad (٦)$$

رابطه (٦) همبستگی کوتاه مدتی را نشان می دهد و مقادیر پیش بینی خیلی زود به سطح ثابتی می رسد؛ یعنی مقادیر $X(t)$ و $X(t+1)$ بعد از چند گام یکی می شوند.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله به معرفی فرآیند پواسن فیلترشده پرداخته شد و از آن برای مدل سازی تغییرات جریان رودخانه استفاده گردید. ابتدا فرم کلی این فرآیند به صورت رابطه (۱) با تابع پاسخ کلی (۲)، در نظر گرفته شد. در نهایت با توجه به روابط حدی و رفتار قدرمطلق تفاضل ضرایب همبستگی نظری و تجربی در دوجدول (۱) و (۲) مدل شدت جریان رودخانه دز به صورت مدل (٤) معرفی گردید و از آن می توان برای پیش بینی استفاده کرد. گرچه رابطه خطی (٦) رابطه با ارزشی است، اما به دلیل همبستگی کوتاه مدت از آن میتوان فقط برای متوسط پیش بینی کوتاه مدت استفاده کرد.

منابع

[1]. Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (2000).Table of Integrals, Series and Products. 6th Ed., Academic Press, San Diego.

[2]. Lefebvre, M. and Guilbault, J.L. (2008). Using Filtered Poisson Processes to Model a River Flow. J. Applied Mathematical Modeling, 32(12), 2792-2805.

[3]. Parzen, E. (1962). Stochastic Processes, 2nd Ed. Duxbury Press,35-40.

[4]. Rahman, S. and Kavvas Grigoriu, M. (1993). Markov model for seismic reliability analysis of degrading structures. J. Structure Engineering, 119, 1844-1865.

[5]. Yoon, J. and Kavvas, M.L. (2003). Probablistic solution to stochastic over Flow equation. J. Hydrology Engineering, 8, 54-63.