نمای مشخصه در توزیع‌های پایدار

[۱]مهدی شمس، [۲]غلامرضا حسامیان
[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان
[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام نور

چکیده

در این مقاله مبحث توزیع‌های پایدار، نمای مشخصه، پارامتر مکان، مقیاس و چولگی و ویژگی آن‌ها مورد بحث و کنکاش قرار می‌گیرد. پس از معرفی توزیع‌های پایدار متداول یعنی نرمال، کوشی و لوی، وجود و یکتایی نمای مشخصه و همچنین ناوردایی توزیع‌های پایدار چند متغیره تحت تبدیلات آفین را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های پایدار، نمای مشخصه، حوزه ربایش، نمایش کانونی، تک‌مدی، تقسیم‌پذیر نامتناهی، تبدیل آفین، پیچش.

۱ مقدمه

نظریه توزیع‌های پایدار یک‌متغیره در سال ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰ به‌طور اساسی توسط لوی[۱] و خین‌چین [۲] توسعه یافت [۶]. پس از آن نتایج این نظریه در شاخه‌های فراوان از جمله مسافت‌یابی در زمین فیزیک، نجوم، اقتصاد، مهندسی، مخابرات، الکترونیک و اخیراً در مدل‌های مالی به کار گرفته شد. هلتس‌مارک[۳] [۵] نشان داد که توزیع‌های پایدار را می‌توان در مدل‌بندی میدان‌های الکتریکی القایی در یک نقطه ثابت در فضایی که به واسطه ذرات شارژ شده در حرکات تصادفی ایجاد می‌شود به کار برد. برآورد پارامتر وزنی دم این توزیع‌ها در تخمین درآمد یک کنسرت موسیقی ملی کاربرد دارد[۱]. همچنین از توزیع‌های پایدار می‌توان در طیف‌نما به عنوان یک تعبیر کلی برای یک نوار طیف نوری در اجرام شبه ستاره‌ای [۲] و تشعشعات ناگهانی و متناوب نیروی خورشیدی که باعث آشفتگی در نوسانات متوسط درجه حرارت زمین می‌شود استفاده کرد[۹]. مطالب بیشتر در مورد نظریه

[۱]Levy
[۲]Khinchine
[۳]Holtsmark

توزیع‌های پایدار را می‌توان در بیشتر کتاب‌های پیشرفته نظریه احتمال از جمله گندنکو [۴] و کولموگرف[۵] [۴]، فلر[۶] [۲] و زولاتاریف[۷] [۱۳] یافت. در بخش ۲ توزیع‌های پایدار معرفی می‌شوند و معادل بودن تعاریف برای این توزیع‌ها که هر یک در جایگاه خود کاربرد دارند مطرح می‌شود. هر توزیع پایدار شامل پارامترهایی مانند شاخص پایداری، پارامتر مکان، پارامتر مقیاس، پارامتر چولگی است. در این بخش پس از بررسی این پارامترها که در ساختار شکل توزیع نقشی اساسی ایفا می‌کنند، برخی از توزیع‌های پایدار مشهور مانند توزیع نرمال، توزیع کوشی و توزیع لوی معرفی می‌شوند. لازم به ذکر است که تابع چگالی بقیه توزیع‌های پایدار را می‌توان با بسط سری‌ها تقریب زد که در این بخش به این مهم نیز می‌پردازیم. پس از آن در مورد خاصیت تک‌مدی بودن این توزیع‌ها و همچنین ناوردایی آن‌ها نسبت به تبدیلات آفین مطالبی را مطرح می‌کنیم و این نتیجه را در حالت چندمتغیره نیز تعمیم می‌دهیم. در پایان این بخش روش شبیه‌سازی متغیرهای تصادفی پایدار را ارائه می‌کنیم. در بخش ۴ وجود و یکتایی شاخص پایداری مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام در بخش ۵ اهم نتایج حاصله در این مقاله را بیان می‌کنیم.

۲ توزیع‌های پایدار

در این بخش در ابتدا توزیع‌های پایدار را معرفی می‌کنیم. پارامتر مکان، مقیاس و چولگی توزیع‌های پایدار باعث خواص جالبی در توزیع آن‌ها می‌شود که راجع به این خصوصیات مباحثی را مطرح می‌کنیم. سپس توزیع‌های پایدار مهم یعنی نرمال، کوشی و لوی را معرفی کرده و تابع چگالی بقیه توزیع‌های پایدار را به شکل بسط سری‌ها تقریب می‌زنیم. خاصیت تک‌مدی‌بودن این توزیع‌ها و همچنین ناوردایی آن‌ها نسبت به تبدیلات آفین از دیگر مطالبی می‌باشند که در این بخش به آن می‌پردازیم. در پایان این بخش متغیرهای تصادفی پایدار را شبیه‌سازی می‌کنیم.

فلر توزیع های پایدار را به‌صورت زیر معرفی می‌کند:

تعریف ۵. *[۲]: اگر X، X_1، X_2، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع F، باشند و $S_n = X_1 + \cdots + X_n$، در این صورت گوییم توزیع غیرتباهیده F پایدار[۸] (اکیداً پایدار[۹]) است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ مقادیر $c_n > 0$ و γ_n وجود داشته باشند به طوری که $S_n \stackrel{d}{=} c_nX + \gamma_n$ ($S_n \stackrel{d}{=} c_nX$).*

تاکنون برای توزیع‌های پایدار تعاریف گوناگونی عنوان شده است. قضیه زیر معادل بودن آن‌ها را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۲. *[۸]: اگر X یک متغیر تصادفی باشد، تعاریف زیر برای پایداری متغیر تصادفی X معادل‌اند:*

۱. *برای هر $a, b \in \mathbb{R}^+$ و هر جفت متغیرهای تصادفی مستقل X_1 و X_2 که با X هم‌توزیع هستند، وجود دارد $c \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma \in \mathbb{R}$ به‌طوری که:*
$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + \gamma.$$

۲. *برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ و متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$ که با X هم‌توزیع هستند، وجود*

---
[۴] Gnedenko
[۵] Kolmogorov
[۶] Feller
[۷] Zolotarev
[۸] Stable
[۹] Strictly Stable

دارد $c_n \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma_n \in \mathbb{R}$ به‌طوری که:

$$X_1+\cdots+X_n \overset{d}{=} c_nX+\gamma_n.$$

۳. *X دارای حوزه ربایش [۱۰] می‌باشد، یعنی یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\{Y_i\}_{i\in N}$ و یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت $\{b_i\}_{i\in N}$ و یک دنباله از اعداد حقیقی $\{a_i\}_{i\in N}$ وجود دارد به‌طوری که $\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} Y_i + a_n \xrightarrow{d} X$.*

۴. *نمایش کانونی [۱۱] تابع مشخصه[۱۲] به‌صورت*

$$\varphi_X(t)=e^{i\mu t-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}[1-i\beta\cdot\mathrm{sgn}(t)\psi_{\alpha}]},$$

است که در آن

$$\psi_\alpha = \begin{cases}\tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \alpha\neq 1\\ -\frac{2}{\pi}\ln|t| & \alpha=1\end{cases}$$

و $\alpha\in(0,2]$ شاخص پایداری[۱۳] یا نمای مشخصه[۱۴] متغیر تصادفی X، $\mu\in\mathbb{R}$ پارامتر مکان[۱۵]، $\sigma\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ پارامتر مقیاس[۱۶] و $\beta\in[-1,1]$ پارامتر چولگی[۱۷] می‌باشد.

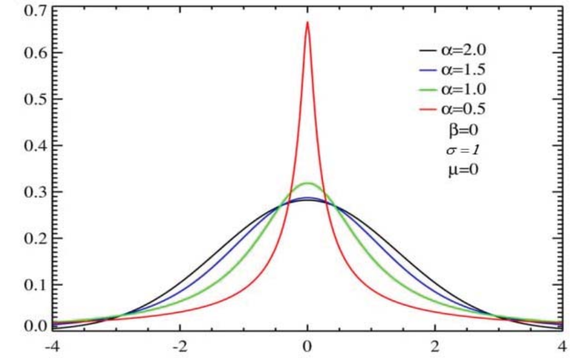
نکته ۱. *اگر متغیر تصادفی X پایدار با نمای مشخصه $\alpha\neq 1$ باشد، $X-\mu$ اکیداً پایدار است و برای حالت $\alpha=1$ شرط لازم و کافی برای اکیداً پایدار بودن X این است که $\beta=0$.*

قسمت ۱ و ۲ قضیه ۱.۲ بیان‌گر این است که خانواده توزیع‌های پایدار مستقل تحت عمل پیچش[۱۸] بسته‌اند[۷] و قسمت ۳ قضیه ۱.۲ بیان می‌کند که این توزیع‌ها یک تعمیم کلی از قضیه حد مرکزی[۱۹] می‌باشند، یعنی توزیع‌های پایدار تنها توزیع‌هایی هستند که به‌صورت حد مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع استاندارد شده به‌دست می‌آیند (در این‌جا مفهوم استاندارد شدن، وجود دنباله‌های $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ و $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ است که در شرط قسمت ۳ قضیه ۱.۲ صدق کنند). در حالت خاص که Y_iها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با واریانس متناهی باشند با اختیار $b_n=\sigma\sqrt{n}$ و $a_n=-\mu\sqrt{n}/\sigma$ یکی از حالت‌های قضیه حد مرکزی حاصل می‌شود. در شرط ۴ قضیه ۱.۲ می‌توان نشان داد شرط لازم و کافی برای متقارن بودن توزیع حول μ این است که $\beta=0$ و در این حالت با قرار دادن $\alpha=1$ و $\alpha=2$ به ترتیب توزیع کوشی و نرمال حاصل می‌شود. همچنین به ازای $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=1$ توزیع لوی به‌دست می‌آید. در شکل ۱ (شکل ۲) تابع چگالی (تابع توزیع) چند توزیع پایدار متقارن برای نمای مشخصه $\alpha=\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ و به ازای پارامتر مکان $\mu=0$، پارامتر مقیاس $\sigma=1$ و پارامتر چولگی $\beta=0$ و در شکل ۳ (شکل ۴) تابع چگالی (تابع توزیع) چند توزیع پایدار چوله برای $\beta=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1$ و به ازای پارامتر مکان $\mu=0$، پارامتر مقیاس $\sigma=1$ و شاخص پایداری $\alpha=\frac{1}{2}$ رسم شده است.

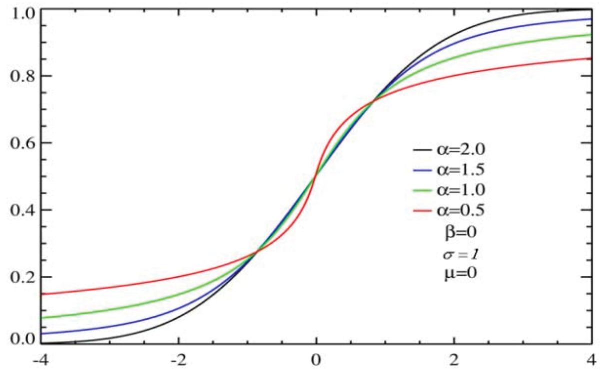
با توجه به شکل ۱ هر چه منحنی تابع چگالی تیزتر باشد دم‌ها سنگین‌تراند[۲۰] و با کاهش α احتمالات دمی افزایش می یابد [۳]. اگر در توزیع پایدار نامتقارن $\beta>0$ باشد توزیع چوله به راست می‌باشد و دم راست از دم چپ

[۱۰] Domain of Attraction
[۱۱] Canonical Representation
[۱۲] Characteristic Function
[۱۳] Index of Stability
[۱۴] Characteristic Exponent
[۱۵] Location Parameter
[۱۶] Scale Parameter
[۱۷] Skewness Parameter

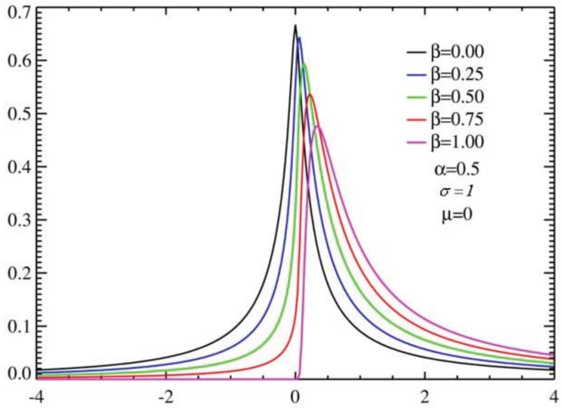
[۱۸] Convolution
[۱۹] Central Limit Theorem
[۲۰] Heavy Tails



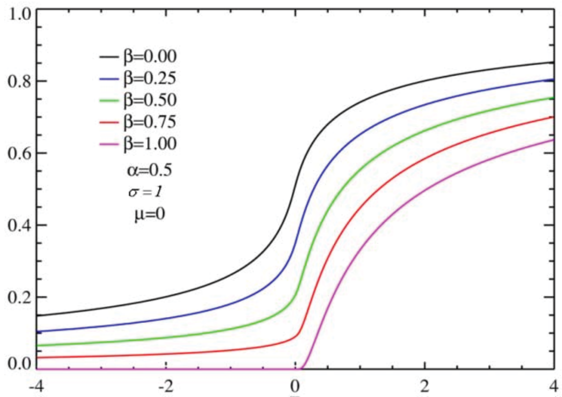
شکل ۱: تابع چگالی چند توزیع پایدار متقارن برای نمای مشخصه $\alpha = ۲, \frac{۳}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}$ و به ازای پارامتر مکان $\mu = ۰$، پارامتر مقیاس $\sigma = ۱$ و پارامتر چولگی $\beta = ۰$.



شکل ۲: تابع توزیع چند توزیع پایدار متقارن برای نمای مشخصه $\alpha = ۲, \frac{۳}{۲}, ۱, \frac{۱}{۲}$ و به ازای پارامتر مکان $\mu = ۰$، پارامتر مقیاس $\sigma = ۱$ و پارامتر چولگی $\beta = ۰$.



شکل ۳: تابع چگالی چند توزیع پایدار چوله برای $\beta = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱$ و به ازای پارامتر مکان $\mu = ۰$، پارامتر مقیاس $\sigma = ۱$ و شاخص پایداری $\alpha = \frac{۱}{۲}$.



شکل ۴: تابع توزیع چند توزیع پایدار چوله برای $\beta = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱$ و به ازای پارامتر مکان $\mu = ۰$، پارامتر مقیاس $\sigma = ۱$ و شاخص پایداری $\alpha = \frac{۱}{۲}$.

همچنین تابع چگالی یک توزیع پایدار نامتقارن با پارامتر چولگی $|\beta| = ۱$ فقط دارای یک دم سنگین است و دم دیگر برای $\alpha < ۱$ از بین می‌رود و برای $۱ \leq \alpha < ۲$ دم‌های توزیع نسبت به دم‌های توزیع نرمال سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کنند[۸]. همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود توزیع نرمال و کوشی هر دو متقارن و زنگوله‌ای شکل‌اند با این تفاوت که توزیع کوشی دم‌های سنگین‌تری دارد و همچنین با توجه به شکل ۳ توزیع توزیع سنگین‌تر است، یعنی برای هر عدد حقیقی مثبت به اندازه کافی بزرگ x داریم:

$$P(X > x) > P(X < -x).$$

تابع چگالی یک توزیع پایدار نامتقارن با پارامتر چولگی $|\beta| < ۱$ دارای دو دم سنگین است که اگر $x \to \infty$، برای برخی ثابت‌های مثبت A و B داریم $f(x) \sim Ax^{-(\alpha+۱)}$ و $f(-x) \sim Bx^{-(\alpha+۱)}$ که این دم‌های سنگین بیان‌کننده نقاط دورافتاده[۲۱] در داده‌های توزیع پایدار می‌باشند[۱۰].

[۲۱] Outliers

لوی یک توزیع چوله به راست با دم‌های سنگین‌تر از توزیع کوشی می‌باشد. برای درک این مطلب در جدول ۱ احتمالات دم این سه توزیع پایدار با هم مقایسه شده‌اند.

جدول ۱: مقایسه احتمالات دم سه توزیع پایدار.

c	$P(X>c)$		
	لوی	کوشی	نرمال
۰	۱/۰۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰
۱	۰/۶۸۲۷	۰/۲۵۰۰	۰/۱۵۸۷
۲	۰/۵۲۰۵	۰/۱۴۷۶	۰/۰۲۲۸
۳	۰/۴۳۶۳	۰/۱۰۲۴	۰/۰۰۱۳۴۷
۴	۰/۳۸۲۹	۰/۰۷۸۰	۰/۰۰۰۰۳۱۶۷
۵	۰/۳۴۵۳	۰/۰۶۲۸	۰/۰۰۰۰۰۰۲۸۶۶

لازم به ذکر است که تمام متغیرهای تصادفی مربوط به توزیع‌های پایدار از نوع پیوسته می‌باشند که به‌جز توزیع‌های پایدار با شاخص پایداری $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$ به‌دست آوردن تابع چگالی‌های آن‌ها به‌صورت یک حالت بسته غیرممکن است ولی تابع چگالی این توزیع‌ها را می‌توان با استفاده از فرمول معکوس [22] به‌صورت بسط سری‌ها نوشت. همان‌طور که می‌دانید با استفاده از فرمول معکوس می‌توان با استفاده از تابع مشخصه متغیر تصادفی پیوسته X یعنی $\varphi_X(t)$، تابع چگالی (و به‌طور مشابه تابع توزیع و تابع جرم احتمال برای حالت گسسته) X را از رابطه $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(u)e^{-iux}du$ محاسبه کرد. با توجه به خاصیت

$$
\begin{aligned}
&f(x;\mu,\sigma,\alpha,\beta)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(u)e^{-iux}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\mu u-\sigma^\alpha|u|^\alpha[1-i\beta.\mathrm{sgn}(u)\psi_\alpha]}e^{-iux}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(-\mu)u-iu(-x)-\sigma^\alpha|u|^\alpha[1-i(-\beta).\mathrm{sgn}(-u)\psi_\alpha]}du\\
&= f(-x;-\mu,\sigma,\alpha,-\beta),
\end{aligned}
$$

[22] Inversion Formula

بدون از دست دادن کلیت تنها برای $x > 0$ تابع چگالی تقریب زده می‌شود و بنابراین برای این مقادیر در [۲] می‌توان نشان داد:

$$
f(x;0,1,\alpha,\beta) \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}(-x^{-\alpha})^k\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{k!}\sin\frac{k\pi(\beta-\alpha)}{2} & \alpha<1\\ \frac{1}{\pi x}\sum_{k=1}^{\infty}(-x)^k\frac{\Gamma(k/\alpha+1)}{k!}\sin\frac{k\pi(\beta-\alpha)}{2\alpha} & \alpha>1. \end{cases}
$$

اگر در شرط ۴ قضیه ۱.۲ در حالت $\alpha = 1$ پارامترهای ψ_α و μ به ترتیب با $\psi'_\alpha = -\ln(t/|c|)/\pi$ و $\mu' = \mu + \beta|c|\ln(|c|)/\pi$ تعویض شوند آنگاه نسبت به حالت قبلی این مزیت وجود دارد که با تغییر متغیرهای $\tau = t/|c|$ و $y = (x-\mu')/|c|$ می‌توان به قسمی استانداردسازی کرد که رابطه زیر برقرار باشد:

$$
f(x;\mu',\sigma,\alpha,\beta)dx = f(y;0,1,\alpha,\beta)dy.
$$

تابع چگالی توزیع پایدار متقارن برای $x \neq 0$ به دو صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
f_1(x;0,1,\alpha,0) &\approx \frac{\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{|x|^{k\alpha+1}}\frac{\Gamma(k\alpha)}{(k-1)!}\sin\left(\frac{k\pi\alpha}{2}\right),\\
f_2(x;0,1,\alpha,0) &\approx \frac{1}{\alpha\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma((2k+1)/\alpha))}{(2k)!}x^{2k},
\end{aligned}
$$

که سری اول (دوم) به ازای $\alpha < 1$ ($1 \leq \alpha \leq 2$) همگرا و به ازای $1 < \alpha < 2$ ($\alpha < 1$) واگرا می‌باشد.

تابع چگالی یک توزیع پایدار می‌تواند به صورت قسمت

حقیقی یک انتگرال نیز بیان شود:

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma,\alpha,\beta) &\approx \tfrac{1}{\pi} Re\left[\int_0^\infty e^{it(x-\mu)} e^{-(\sigma t)^\alpha(1-i\beta\psi_\alpha)}dt\right] \\ &\approx \tfrac{1}{\pi} Re\left[\int_0^\infty e^{it(x-\mu)}\sum_{n=0}^\infty \tfrac{(-q_\alpha t^\alpha)^n}{n!}dt\right] \\ &\approx \tfrac{1}{\pi} Re\left[\sum_{n=1}^\infty \tfrac{(-q_\alpha)^n}{n!}\left(\tfrac{i}{x-\mu}\right)^{\alpha n+1}\Gamma(\alpha n+1)\right], \end{aligned}$$

به‌طوری که $q_\alpha=\sigma^\alpha(1-i\beta\psi_\alpha)$ و $x\neq\mu$ [۲].

یکی از خواص مهم توزیع‌های پایدار تک‌مدی بودن[23](زنگوله‌ای شکل بودن) آن‌ها می‌باشد و این بدین معنی است که n امین مشتق تابع چگالی آن‌ها به‌طور دقیق دارای n ریشه است [۶]. طرح مسأله تک‌مدی بودن توزیع‌های پایدار به وینتنر[24] [۱۱] بر می‌گردد که نشان داد توزیع‌های پایدار متقارن تک‌مدی هستند. اثبات تک‌مدی بودن این توزیع‌ها در حالت عمومی توسط یامازاتو[25] [۱۲] بیان شده است که ثابت می‌کند توزیع‌های تقسیم‌پذیر نامتناهی[26] تک‌مدی هستند.

قابل ذکر است که تاکنون هیچ نتیجه تحلیلی برای یافتن موقعیت مد توزیع پیدا نشده است، اما با روش‌های عددی می‌توان مد توزیع‌های پایدار را پیدا کرد.

نکته ۲. *یک توزیع پایدار را می‌توان به‌صورت تابع مشخصه*

$$\varphi(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX}dF(x),$$

نیز تعریف کرد، یعنی F پایدار است هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $c_n>0$ و γ_n وجود داشته باشند که: $\varphi_{S_n}(t)=\varphi_{c_nX+\gamma_n}(t)$ و یا $\varphi^n(t)=\varphi(c_nt)e^{it\gamma_n}$ و یا $n\ln\varphi(t)=\ln\varphi(c_nt)+it\gamma_n$.

مثال ۱. *توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ با تابع مشخصه $\varphi(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$ پایدار است، زیرا با توجه به نکته ۲ داریم:*

$$\begin{aligned} &n\ln\varphi(t)=\ln\varphi(c_nt)+it\gamma_n \Leftrightarrow \\ &i\mu tn-\tfrac{n}{2}\sigma^2t^2 = i\mu tc_n-\tfrac{1}{2}\sigma^2t^2c_n^2+it\gamma_n \Leftrightarrow \\ &\tfrac{\sigma^2t^2}{2}(c_n^2-n)+it(n\mu-c_n\mu-\gamma_n)=0. \end{aligned}$$

با توجه به این که عبارت اخیر برای هر t برقرار است نتیجه می‌گیریم $c_n=\sqrt{n}$ و $\gamma_n=(n-\sqrt{n})\mu$. بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$، $c_n=\sqrt{n}\in\mathbb{R}^+$ و $\gamma_n=(n-\sqrt{n})\mu\in\mathbb{R}$ وجود دارند به‌طوری‌که $X_1+\cdots+X_n\stackrel{d}{=}c_nX+\gamma_n$ و در پی آن طبق شرط ۲ قضیه ۲.۱، توزیع نرمال پایدار است. همچنین طبق نکته ۱، متغیر تصادفی $X-\mu$ که دارای توزیع $N(0,\sigma^2)$ است یک توزیع اکیداً پایدار می‌باشد.

قابل توجه است که اگر توزیع F پایدار باشد و $E(X)=\mu$ و $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2<\infty$، ضرایب c_n و γ_n به طریق زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{aligned} E(S_n)&=E(c_nX+\gamma_n),\\ \mathrm{Var}(S_n)&=\mathrm{Var}(c_nX+\gamma_n), \end{aligned}$$

یا این که

$$\begin{aligned} n\mu&=c_n\mu+\gamma_n,\\ n\sigma^2&=c_n^2\sigma^2, \end{aligned}$$

[23] Unimodality

[24] Wintner

[25] Yamazato

[26] Infinitely Divisible

و لذا

$$c_n = \sqrt{n},$$
$$\gamma_n = (n-\sqrt{n})\mu,$$

که همان ضرایب توزیع نرمال است. بنابراین همان‌گونه که بعداً نیز اشاره خواهد شد تنها توزیع پایدار با واریانس متناهی توزیع نرمال است.

مثال ۲. *توزیع کوشی $C(\mu,\sigma)$ با تابع چگالی*
$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2},$$
و تابع مشخصه $\varphi(t)=e^{i\mu t-\sigma|t|}$ پایدار است، زیرا:

$$n\ln\varphi(t) = \ln\varphi(c_n t) + it\gamma_n \Leftrightarrow$$
$$-n\sigma|t| + in\mu t = -\sigma|c_n t| + ic_n\mu t + it\gamma_n \Leftrightarrow$$
$$\sigma|t|(c_n - n) + it(\gamma_n + c_n\mu - n\mu) = 0,$$

که عبارت اخیر برای هر t برقرار است هرگاه: $c_n = n$ و $\gamma_n = 0$. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $c_n = n \in \mathbb{R}^+$ و $\gamma_n = 0 \in \mathbb{R}$ در شرط ۲ قضیه ۱.۲ وجود دارند و در نتیجه توزیع کوشی اکیداً پایدار است. همچنین با استفاده از نکته ۱ در این توزیع داریم $\beta = 0$ و از این رو توزیع کوشی یک توزیع اکیداً پایدار متقارن است.

به‌طور مشابه توزیع لوی $\mathrm{Levy}(\mu,\sigma)$ با تابع چگالی
$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}}\frac{1}{(x-\mu)^{3/2}}e^{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}}, \quad x>\mu,$$
پایدار است (برای دیدن جزئیات اثبات ر. ک. [8] صفحه ۲۳).

۳ ناوردایی توزیع های پایدار

در این قسمت ناوردایی توزیع‌های پایدار یک متغیره را تحت تبدیلات آفین[27] بررسی می‌کنیم و سپس آن را در حالت چندمتغیره تعمیم می‌دهیم.

گزاره ۱. *اگر X یک توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان μ، پارامتر مقیاس σ و پارامتر چولگی β باشد و گروه*
$$G = \{g_{a,b}(x) = ax+b \,:\, a\neq 0, b\in\mathbb{R}\},$$
روی X عمل کند، آن‌گاه $g_{a,b}(X) = aX+b$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان $\mu' = a\mu + b + \Omega_\alpha$، پارامتر مقیاس $\sigma' = |a|\sigma$ و پارامتر چولگی $\beta_2' = \beta\mathrm{sgn}(a)$ می‌باشد که در آن

$$\Omega_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha\neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\beta\sigma ln|a| & \alpha = 1. \end{cases}$$

اثبات. با توجه به قسمت ۴ از قضیه ۱.۲ داریم:

$$\varphi_{g_{a,b}(X)}(t) = e^{itb}\phi_X(at),$$
$$= e^{it(a\mu+b)-(|a|\sigma)^\alpha|t|^\alpha\left[1-i\beta\mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(t)\psi'_\alpha\right]},$$

به‌طوری‌که

$$\psi'_\alpha = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \alpha\neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\ln|t| - \frac{2}{\pi}\ln|a| & \alpha = 1, \end{cases}$$

[27]Affine Transformations

$$= \Psi_\alpha + \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\ln|a| & \alpha = 1, \end{cases}$$
$$= \Psi_\alpha + \frac{\Omega_\alpha}{\beta\sigma_a}.$$

بنابراین

$$\varphi_{g_{a,b}(X)}(t) = e^{it\mu' - it\Omega_\alpha - \sigma'^\alpha |t|^\alpha \left[1 - \beta' \operatorname{sgn}(t)\Psi_\alpha - i\frac{\operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(t)\,\Omega_\alpha}{\sigma a}\right]}$$
$$= e^{it\mu' - \sigma'^\alpha |t|^\alpha \left[1 - \beta' \operatorname{sgn}(t)\Psi_\alpha\right]} \times e^{-\frac{i\gamma}{\sigma a}},$$

که در آن

$$\gamma = \left[\sigma\ at - \sigma^\alpha |a|^\alpha \operatorname{sgn}(a)\,|t|^\alpha \operatorname{sgn}(t)\right]\Omega_\alpha$$
$$= \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1, \\ \left[\sigma\ at - \sigma\ at\right]\left(-\frac{2}{\pi}\beta\sigma\ a\ln|a|\right) = 0 & \alpha = 1. \end{cases}$$

پس با توجه به تابع مشخصه متغیر تصادفی $g_{a,b}(X)$ یعنی

$$\varphi_{g_{a,b}(X)}(t) = e^{it\mu' - \sigma'^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta' \operatorname{sgn}(t)\Psi_\alpha\right]},$$

و به‌کارگیری قسمت ۴ در قضیه ۱.۲ حکم اثبات می‌شود.
□

نتیجه ۱.۳. *اگر X یک توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان μ، پارامتر مقیاس σ و پارامتر چولگی β باشد و گروه $G_1 = \{g_{1,b}(x) = x + b : b \in \mathbb{R}\}$ $(G_2 = \{g_{a,0}(x) = ax : a \neq 0\})$ روی X عمل کند، آن‌گاه $g_{1,b}(X) = X + b$ $(g_{a,0}(X) = aX)$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان $\mu'_1 = \mu + b$ $(\mu'_2 = a\mu + \Omega_\alpha)$، پارامتر مقیاس $\sigma'_1 = \sigma$ $(\sigma'_2 = |a|\sigma)$ و پارامتر چولگی $\beta'_1 = \beta$ $(\beta'_2 = \beta\operatorname{sgn}(a))$ می‌باشد که در آن*

$$\Omega_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi}\beta\sigma ln|a| & \alpha = 1. \end{cases}$$

گزاره زیر نشان می‌دهد که مجموع دو متغیر تصادفی مستقل پایدار نیز پایدار است که اثبات آن دقیقاً مشابه گزاره قبل است.

گزاره ۲. *فرض کنید X_1 (X_2) دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان μ_1 (μ_2)، پارامتر مقیاس σ_1 (σ_2) و پارامتر چولگی β_1 (β_2) باشند. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه $X_1 + X_2$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان $\mu = \mu_1 + \mu_2$، پارامتر مقیاس $\sigma = \sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha$ و پارامتر چولگی $\beta = (\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha)/(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)$ است.*

قابل ذکر است که با استقراء ریاضی می‌توان نشان داد اگر X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$، متغیرهای تصادفی مستقل با شاخص پایداری α، پارامتر مکان μ_i، پارامتر مقیاس σ_i و پارامتر چولگی β_i باشند، آن‌گاه برای ثابت‌های دلخواه t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ متغیر تصادفی $Y = \sum_{i=1}^n t_i X_i$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان

$$\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i\mu_i & \alpha \neq 1 \\ \sum_{i=1}^n t_i\mu_i - \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^n \beta_i t_i \sigma_i \ln|t_i| & \alpha = 1, \end{cases}$$

پارامتر مقیاس

$$\sigma(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\sqrt[\alpha]{\sum_{i=1}^{n}|t_i\sigma_i|^{\alpha}},$$

و پارامتر چولگی

$$\beta(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\mathrm{sgn}(t_i)\,|t_i\sigma_i|^{\alpha}}{(\sigma(t_1,t_2,\ldots,t_n))^{\alpha}},$$

خواهد بود. در حالت خاص که X_iها متقارن باشند یعنی $\beta_i=0$ $(i=1,2\ldots,n)$ می‌توان نتیجه گرفت که $\sum_{i=1}^{n}t_iX_i$ نیز متقارن است. به‌عبارت دیگر نتیجه می‌شود که $\mu(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\beta(t_1,t_2,\ldots,t_n)=0$ و $\sum_{i=1}^{n}t_i\mu_i$. همچنین اگر X_iها هم‌توزیع باشند یعنی برای هر $i=1,2,\ldots,n$، $\mu_i=\mu$، $\sigma_i=\sigma$ و $\beta_i=\beta$ نتیجه می‌گیریم که $\sum_{i=1}^{n}X_i$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان $n\mu$، پارامتر مقیاس $\sqrt[\alpha]{n}\sigma$ و پارامتر چولگی β می‌باشد.

اکنون می‌توان توابع پایدار چندمتغیره را نیز معرفی کرد. به‌طور مشابه یک بردار k بعدی $\mathbf{X}$ پایدار است هرگاه برای هر $n\geq 2$ یک ثابت $c_n>0$ و یک بردار $\mathbf{d}_n$ (k بعدی) وجود داشته باشد به قسمی که

$$\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\ldots+\mathbf{X}_n\overset{d}{=}c_n\mathbf{X}+\mathbf{d}_n.$$

اگر $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_k)'$ یک بردار تصادفی توأماً پایدار باشد، آن‌گاه برای هر $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_k)'\in\mathbb{R}^k$ تصویر یک‌بعدی $Y=\mathbf{s}'\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{k}s_iX_i$ یک متغیر تصادفی پایدار یک‌بعدی با شاخص پایداری یکسان α می‌باشد. بنابراین $\varphi_{\mathbf{X}}(s)=\varphi_Y(1)$. پس می‌توان گزاره ۱ را برای حالت چندمتغیره و برای تبدیلات آفین تعمیم داد. برای این منظور توجه شود که برای هر ماتریس دلخواه $A_{m\times k}$ و بردار $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$، $\mathbf{Z}=A\mathbf{X}+\mathbf{b}$ یک توزیع پایدار m بعدی خواهد بود. برای نشان دادن این حقیقت از این که برای هر $\mathbf{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_m)'\in\mathbb{R}^m$،

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\mathbf{t})&=e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}E\left(e^{i\mathbf{t}'AX}\right)\\&=e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{s})\\&=e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}\varphi_Y(1),\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{s}=A'\mathbf{t}=(s_1,s_2,\ldots,s_k)'\in\mathbb{R}^k$ می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{Z}$ دارای توزیع پایدار با شاخص پایداری α، پارامتر مکان $\mu(s_1,s_2,\ldots,s_k)+\sum_{i=1}^{m}b_it_i$، پارامتر مقیاس $\sigma(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ و پارامتر چولگی $\beta(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ است. برای مثال در حالت نرمال چند متغیره می‌توان نشان داد $\sigma(s_1,s_2,\ldots,s_k)=(\mathbf{s}'\Sigma\mathbf{s})^{\frac{1}{2}}$ که در آن Σ ماتریس کواریانس متناظر است.

برای شبیه‌سازی[۲۸] متغیرهای تصادفی از توزیع‌های پایدار مختلف، می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم [۸]:

۱. برای شبیه‌سازی متغیر تصادفی نرمال $N(\mu,\sigma^2)$، دو متغیر تصادفی مستقل $X_1=\mu+\sigma\sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ و $X_2=\mu+\sigma\sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$ که در آن U_1 و U_2 متغیرهای تصادفی مستقل $U(0,1)$ می‌باشند مناسب است.

۲. برای شبیه‌سازی متغیر تصادفی کوشی $C(\mu,\sigma)$، متغیر تصادفی $X=\sigma\tan\left(\pi U-\frac{\pi}{2}\right)+\mu$ که در آن U متغیر تصادفی $U(0,1)$ می‌باشد مناسب است.

۳. برای شبیه‌سازی متغیر تصادفی لوی $\mathrm{Levy}(\mu,\sigma)$، متغیر تصادفی $X=\frac{\sigma}{Z^2}+\mu$ که در آن Z متغیر تصادفی $N(0,1)$ می‌باشد مناسب است.

[۲۸] Simulation

۴. در حالت کلی، فرض کنید Θ و W به ترتیب دو متغیر تصادفی مستقل $U(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ و نمایی $E(۱)$ باشند. در این صورت به ازای $۱\neq\alpha$ و $-۱\leq\beta\leq۱$ و با اختیار

$$\theta_۰=\arctan\left(\beta\tan(\pi\alpha/۲)\right)/\alpha,$$

ملاحظه می‌شود که متغیر تصادفی

$$Z=\begin{cases}\frac{\sin\alpha(\theta_۰+\Theta)}{\sqrt[\alpha]{\cos\alpha\theta_۰\cos\Theta}}[\frac{\cos(\alpha\theta_۰+(\alpha-۱)\Theta)}{W}]^{(۱-\alpha)/\alpha} & \alpha\neq۱,\\ \frac{۲}{\pi}[(\frac{\pi}{۲}+\beta\Theta)\tan\Theta-\beta\ln(\frac{W\cos\Theta}{۱+\frac{۲}{\pi}\beta\Theta})] & \alpha=۱,\end{cases}$$

شبیه‌سازی متغیر تصادفی پایدار است. لازم به ذکر است که در حالت خاص که توزیع پایدار متقارن است $(\beta=۰)$ باید $\theta_۰=۰$ و بنابراین متغیر تصادفی

$$Z=\begin{cases}\frac{\sin\alpha\Theta}{\sqrt[\alpha]{\cos\Theta}}\left[\frac{\cos(\alpha-۱)\Theta}{W}\right]^{(۱-\alpha)/\alpha} & \alpha\neq۱\\ \tan\Theta & \alpha=۱,\end{cases}$$

شبیه‌سازی یک متغیر تصادفی پایدار متقارن است [۸].

۴ بررسی وجود و یکتایی نمای مشخصه

نتیجه‌ای که از مثال‌های ۱ و ۲ در بخش قبل گرفته می‌شود این است که در توزیع‌های پایدار همواره $c_n=n^{۱/\alpha}$ که در آن نمای مشخصه α در محدوده $۰<\alpha\leq۲$ بوده و مقداری منحصر به فرد است.

برای نشان دادن این حقیقت بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم توزیع F متقارن است، زیرا توجه کنید که اگر F پایدار باشد ضریب c_n در آن با همین ضریب در توزیع متقارن $F_۰$ که مربوط به متغیر تصادفی $X_۱-X_۲$ است یکسان می‌باشد. برای دیدن این حقیقت با اختیار کردن دو نمونه تصادفی مستقل $X_۱,\dots,X_n$ و $Y_۱,\dots,Y_n$ از توزیع پایدار F و قرار دادن $T_n=\sum_{i=۱}^n(X_i-Y_i)$ داریم:

$$\begin{aligned}\varphi_{T_n}(t)&=\varphi^n_{X-Y}(t)\\&=\varphi^n_X(t)\varphi^n_Y(-t)\\&=\varphi_X(c_nt)e^{it\gamma_n}\varphi_Y(-c_nt)e^{-it\gamma_n}\\&=\varphi_{c_n(X-Y)}(t),\end{aligned}$$

و لذا $T_n\stackrel{d}{=}c_n(X-Y)$. البته این نتیجه را می‌توان از طریق دیگر یعنی با انتخاب $Y_i=X_{۲i+۱}-X_{۲i}$ نیز به‌دست آورد که در این صورت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^nY_i&=\sum_{i=۱}^nX_{۲i+۱}-\sum_{i=۱}^nX_{۲i}\\&\stackrel{d}{=}c_nX+\gamma_n-c_nX'-\gamma_n\\&=c_n(X-X'),\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $F_۰$ پایدار و متقارن است. بنابراین مسأله را با فرض متقارن بودن F حل می‌کنیم.

۱.۴ اثبات وجود α

در ابتدا با شکستن مجموع $S_{m+n}=S_m+S'_n$ به دو مجموع مستقل S_m و $S'_n=S_{m+n}-S_m$ و از پایدار بودن توزیع F داریم:

$$S_m\ \stackrel{d}{=}\ c_mX,$$

$$\begin{aligned} S'_n &\overset{d}{=} c_n X, \\ S_{m+n} &\overset{d}{=} c_{m+n} X, \end{aligned}$$

و یا

$$c_{m+n} X \overset{d}{=} c_m X_۱ + c_n X_۲, \qquad (۱)$$

که با استفاده از استقراء داریم:

$$\begin{aligned} S_{mn} &\overset{d}{=} c_{mn} X \\ &\overset{d}{=} c_n X_۱ + \ldots + c_n X_m \\ &= c_n S_m \\ &\overset{d}{=} c_n c_m X, \end{aligned}$$

و از این رو برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$c_{mn} = c_n c_m, \qquad (۲)$$

که دوباره با استفاده از رابطه (۲) و استقراء می‌توان نشان داد که اگر $n = r^s$، آنگاه $c_n = c_r^s$ یعنی:

$$c_{r^s} = c_r^s. \qquad (۳)$$

اکنون با قرار دادن $s = m + n$:

$$\begin{aligned} P(X > t) &= P(c_s X > c_s t) \\ &= P(c_m X_۱ + c_n X_۲ > c_s t) \\ &= P(\frac{c_m}{c_n} X_۱ + X_۲ > \frac{c_s}{c_n} t) \\ &\geq P(\left\{\frac{c_m}{c_n} X_۱ \geq ۰\right\} \cap \left\{X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t\right\}) \\ &= P(X_۱ \geq ۰) P(X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t) \\ &= \frac{۱}{۲} P(X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t), \end{aligned}$$

که نامساوی اخیر به دلیل تقارن $X_۱$ حول صفر است. بنابراین برای هر $t > ۰$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_۰^\infty P(X > t)\, dt \\ &\geq \frac{۱}{۲} \frac{c_n}{c_s} \int_۰^\infty P(X_۲ \geq \frac{c_s}{c_n} t)\, d\,(t c_s / c_n) \\ &= \frac{c_n}{۲ c_s} E(X). \end{aligned}$$

با توجه به متناهی بودن $E(X)$ برای هر $s > n$، $\frac{c_n}{c_s} \leq ۲$ که با اختیار $n = r^s$ و $m = (r+۱)^s - r^s$:

$$\left(\frac{c_r}{c_{r+۱}}\right)^s = \frac{c_r^s}{c_{r+۱}^s} = \frac{c_{r^s}}{c_{(r+۱)^s}} = \frac{c_n}{c_s} \leq ۲.$$

بنابراین $c_r \leq c_{r+۱}$ (یعنی c_r یک تابع صعودی در r است)، پس $c_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}$ که یک جواب معادله (۲)، یعنی $c_{mn} = c_n c_m$ می‌باشد، یک جواب منحصر به فرد است. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک α وجود دارد که $c_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}$. اکنون باید نشان دهیم که این α یکتاست و $\alpha \leq ۲$.

۲.۴ اثبات یکتایی α

اگر $c_u = u^{\frac{۱}{\beta}}$ باشد نشان می‌دهیم $\alpha = \beta$. با توجه به رابطه (۳) داریم:

$$\begin{cases} n = r^j \Rightarrow c_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}, \\ s = \rho^k \Rightarrow c_s = s^{\frac{۱}{\beta}}. \end{cases}$$

اما برای هر $s=\rho^k$ می‌توان عدد صحیح $n=r^j$ را به گونه‌ای یافت که $n=r^j < s \le rn = r^{j+1}$. بنابراین:

$$c_s = s^{\frac{1}{\beta}} \le r^{\frac{1}{\beta}} n^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}}(c_n^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}} = r^{\frac{1}{\beta}} c_n^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

ادعا می‌کنیم که $\alpha \le \beta$. زیرا اگر نباشد یعنی $1 > \frac{\beta}{\alpha}$ آن‌گاه داریم $c_s^{\frac{\beta}{\alpha}} \le r^{\frac{1}{\alpha}} c_n$ یا این‌که $c_s^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \le r^{\frac{1}{\alpha}} c_n/c_s < 2r^{\frac{1}{\alpha}}$. به عبارت دیگر $c_s < \sqrt[\frac{\beta}{\alpha}-1]{2r^{\frac{1}{\alpha}}}$ که این نشان می‌دهد $c_s = s^{\frac{1}{\beta}}$ کران‌دار است و این تناقض است. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $\beta \le \alpha$ و در پی آن $\alpha = \beta$.

۳.۴ اثبات $\alpha \le 2$

همان‌طور که در مثال ۱ دیدیم در توزیع نرمال $\alpha = 2$. حال با استفاده از رابطه (۱) داریم $\mathrm{Var}(c_{m+n}X) = \mathrm{Var}(c_mX_1 + c_nX_2)$ و یا $c_{m+n}^2\sigma^2 = c_m^2\sigma^2 + c_n^2\sigma^2$. توجه داشته باشید که اگر $\sigma^2 < \infty$ باشد، آن‌گاه داریم $c_{m+n}^2 = c_m^2 + c_n^2$ که با استفاده از رابطه (۳)، $c_{(m+n)^2} = c_{m^2} + c_{n^2}$ و یا $(m+n)^{\frac{2}{\alpha}} = m^{\frac{2}{\alpha}} + n^{\frac{2}{\alpha}}$ که نتیجه می‌دهد $\alpha = 2$. بنابراین اگر F پایدار با واریانس متناهی باشد داریم $\alpha = 2$ و به‌طور معادل اگر F پایدار باشد و $\alpha \ne 2$ باید واریانس نامتناهی باشد. بنابراین اگر واریانس توزیع F متناهی باشد، یا توزیع F پایدار نیست و یا $\alpha = 2$. با توجه به مطالب بالا می‌توانیم نشان دهیم که $\alpha \le 2$. زیرا اگر نباشد یعنی $\alpha > 2$، با استفاده از تقارن توزیع F داریم $S_n \stackrel{d}{=} c_nX$ و بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P(|S_n| > tc_n) &= P(|c_n||X| > tc_n) \\ &= P(|X| > t) \\ &= 2P(X > t) \\ &\le 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین با اختیار کردن $\varepsilon = \frac{1}{4}$ وجود دارد $t > 0$ به‌طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$P(|S_n| > tc_n) < \frac{1}{4}. \qquad (4)$$

اگر قرار دهیم $K_n = \max_{j=1}^{n} |X_j|$ و $D_n = S_n - K_n$، با توجه به تقارن که در ابتدا فرض شد، چهار جفت $(\pm D_n, \pm K_n)$ هم‌توزیع هستند و از این رو با استفاده از نامساوی (۴) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} &\ge P(|S_n| > tc_n) \\ &\ge P(S_n > tc_n) \\ &= P(K_n + D_n > tc_n) \\ &\ge P(K_n > tc_n, D_n \ge 0) \\ &= \tfrac{1}{2}(P(K_n > tc_n, D_n \ge 0) \\ &\qquad + P(K_n > tc_n, D_n \le 0)) \\ &\ge \tfrac{1}{2}P(K_n > tc_n) \\ &\ge \tfrac{1}{2}[1 - P(|X_1| \le tc_n, \ldots, |X_n| \le tc_n] \\ &\ge \tfrac{1}{2}[1 - (F(tc_n) - F(-tc_n))^n] \end{aligned}$$

و در پی آن با استفاده از این حقیقت که برای هر $0 < x < 1$، $x \le e^{(x-1)}$ می‌توان به راحتی ثابت کرد که برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &\le (F(tc_n) - F(-tc_n)))^n \\ &\le e^{-n(1-F(tc_n)+F(-tc_n))} \\ &\le e^{-2n(1-F(tc_n))}, \end{aligned}$$

و یا

$$n(1-F(tc_n)) < \frac{\ln 2}{2} = M_0.$$

بنابراین $n\,(1-F(tc_n))$ کران‌دار است. اما برای هر $x > t$ وجود دارد n و α که $\frac{x}{t} = n^\alpha = c_n$، بنابراین برای هر $x > t$:

$$x^\alpha\,(1-F(x)) < \frac{M_0}{n} c_n^\alpha t^\alpha = M_0 t^\alpha = M.$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty P(X^2 > y)\,dy \\
&= 2\int_0^\infty P(X > \sqrt{y})\,dy \\
&\overset{y=x^2}{=} 4\int_0^\infty x^\alpha\,(1-F(x))\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \\
&\leq 4M\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k} x^{1-\alpha}dx \\
&= \frac{4M}{2-\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[2^{k(2-\alpha)}(1-2^{\alpha-2})\Big] \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(2-\alpha)},
\end{aligned}$$

که نامساوی اخیر با توجه به این که

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2-\alpha}(1-2^{\alpha-2}) < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2+\alpha < 2^\alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha > 2,
\end{aligned}$$

برقرار است. پس

$$E(X^2) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(2-\alpha)} < \infty,$$

و لذا $\sigma^2 < \infty$ که با پایدار بودن توزیع F در تناقض است. بنابراین $\alpha \leq 2$.

ساختار اثبات وجود و یکتایی نمای مشخصه به ما این امکان را می‌دهد که پایدار نبودن برخی از توزیع‌ها را به راحتی بررسی کنیم. برای روشن شدن این موضوع به دو مثال زیر اکتفا می‌کنیم.

مثال ۳. *توزیع گاما (و در نتیجه توزیع های نمایی و کای دو) پایدار نیست زیرا با توجه به ساختار تابع مشخصه آن یعنی*

$$\varphi(t) = (1-\frac{it}{\beta})^{-\alpha},$$

اگر این توزیع پایدار باشد با توجه به رابطه (۱) برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ باید داشته باشیم:

$$(n+m)^{\frac{1}{\alpha}} X \overset{\mathbf{d}}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + m^{\frac{1}{\alpha}} X_2.$$

بنابراین

$$\varphi_X(t(n+m)^{\frac{1}{\alpha}}) = \varphi_{X_1}(tn^{\frac{1}{\alpha}})\varphi_{X_2}(tm^{\frac{1}{\alpha}}),$$

و یا

$$(1-it\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta})^{-\alpha}(1-it\frac{m^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta})^{-\alpha} = (1-it\frac{(m+n)^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta})^{-\alpha},$$

و یا به طور معادل،

$$-\frac{it}{\beta}(n^{\frac{1}{\alpha}} + m^{\frac{1}{\alpha}}) - \frac{t^2}{\beta^2}(nm)^{\frac{1}{\alpha}} = -\frac{it}{\beta}(m+n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

عبارت اخیر برای هر t برقرار است هرگاه:

$$\begin{cases} (m+n)^{\frac{1}{\alpha}} &= m^{\frac{1}{\alpha}} + n^{\frac{1}{\alpha}}, \\ mn &= 0, \end{cases}$$

که معادله دوم نتیجه می‌دهد که $m = 0$ یا $n = 0$ که با نامنفی بودن m و n در تناقض است.

مثال ۴. *توزیع پواسن با میانگین λ پایدار نیست، زیرا:*

$$n \ln \varphi(t) = \ln \varphi(c_n t) + it\gamma_n,$$

اگر و فقط اگر

$$n(e^{it} - 1) = e^{itc_n} - 1 - i(t/\lambda)\gamma_n,$$

اگر و فقط اگر

$$n(\cos t + i \sin t - 1) = \cos c_n t + i \sin c_n t - 1 - i(t/\lambda)\gamma_n,$$

که رابطه اخیر معادل است با

$$\begin{cases} n \sin t &= \sin c_n t - (t/\lambda)\gamma_n \\ n \cos t - \cos c_n t &= n - 1. \end{cases}$$

با توجه به این‌که $c_n > 0$ و γ_n که در معادله بالا صدق کند وجود ندارد، نتیجه گرفته می‌شود که توزیع پواسن پایدار نیست.

۵ نتیجه‌گیری

تنها توزیع پایدار با واریانس متناهی توزیع نرمال ($\alpha = 2$) است. برای توزیع‌های پایدار دیگر با نمای مشخصه $0 < \alpha < 2$، $E|X|^p$ برای $0 < p < \alpha$ متناهی و برای $p \geq \alpha$ نامتناهی می‌باشد. این خاصیت توزیع‌های پایدار باعث می‌شود که نسبت به توزیع نرمال تغییرات بیشتری داشته باشند، بنابراین زمانی که تغیرات خیلی زیاد است این توزیع‌ها به خاطر این که تابع چگالی آن‌ها دارای دم سنگین‌اند، گزینه بهتری برای انتخاب می‌باشند. در این مقاله نشان دادیم که خانواده توزیع‌های پایدار نسبت به تبدیلات آفین ناوردا هستند. برای گروه‌های تبدیل دیگر هنوز ناوردایی این توزیع‌ها بررسی نشده است که می‌تواند شروعی برای تحقیقات آینده باشد.

مراجع

[1] Connolly, M. and Krueger, A.B. (2005). Rockonomics: the economics of popular music. NBER, Working Paper 11282, National Bureau of Economic Research.

[2] Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 2, 2nd edn, John Wiley and Sons, New York.

[3] Gawronski, W. (1984). On the Bell-Shape of Stable Distributions. Ann. Prob., 12, 230-242.

[4] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954). Limit Distributions for Sum of Independent Random

Variables. Addison-wesley, reading, MA.

[5] Holtsmark, J. (1919). Über die vebreitering von spektrallinier. Ann. Physik, 58, 577-630.

[6] Khinchin, A.Y. (1938). Limit Laws for Sums of Independent Random Variables. ONTI, Moscow.

[7] Kotz, S. and Johnson, N.L. (1988). Stable Distributions, Encyclopedia of Statistical Sciences. VIII, eds, Wiley, New York, 617-620.

[8] Nolan, J.P. (2009). Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data. Incomplete book Manuscript.

[9] Scafetta, N., and Bruce, J.W. (2008). Is climate sensitive to solar variability? Physics Today, 60, 50-51.

[10] Skorokhod, A.V. (1961). Asymptotic formulas for stable distribution laws. Select. Trans. Math. Statist. Prob.,1, 157-161.

[11] Wintner, A. (1936). On a class of fourier transforms. American Journal of Mathematics, 58, 45-90.

[12] Yamazato, M. (1978). Unimodality of infinitely divisible distributions of class L. Ann. Prob., 6, 523-531.

[13] Zolotarev, V.M. (1986). One-Dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society, Providence, RI.