کمینه انحراف و دیگر معیارهای انتخاب طرح‌های کسری دو سطحی منظم

بهاره ارضی[۱]

چکیده

یکی از مسائل اساسی که در استفاده از طرح‌های کسری دنبال می‌شود، چگونگی انتخاب طرح بهینه از میان طرح‌های کسری دارای تعداد اجرا یا تعداد ترکیبات تیماری برابراست. برای طرح‌ها با وضوح یکسان معیار کمینه انحراف عمومی‌ترین معیار برای مقایسه طرح‌های منظم محسوب می‌شود. این مقاله به معرفی معیار کمینه انحراف و ارتباط آن با سایر معیارها می‌پردازد. این معیار ملاک مناسبی برای رتبه‌بندی طرح‌های کسری منظم است. در خلال مباحث مثال‌هایی برای کاربرد معیارهای معرفی شده، ارائه شده است.

واژه های کلیدی: الگوی طول واژه، اصل سلسله مراتبی بودن اثرات، کمینه انحراف، طرح های کسری، وضوح.

۱– مقدمه

در بسیاری از زمینه‌های تحقیقات علمی، آزمایش یکی از ابزارهای اساسی برای به دست آوردن یافته‌های جدید یا درک بهتر وقایع است. برای مثال، آزمایش ممکن است به یافتن راهی برای بالابردن سرعت یک واکنش شیمیایی منتهی شود و یا در پیدا کردن ایده تازه‌ای برای بهبود کیفیت یک محصول صنعتی مؤثر باشد. طرح‌های آزمایش بخشی از علوم و روش‌هایی هستند که توانایی بهتر آزمایش، تحلیل کارآمد داده‌ها و ایجاد ارتباط بین نتایج حاصل از تحلیل و اهداف اصلی آزمایش را به آزمایشگر می‌دهند. در بیشتر آزمایش‌ها لازم است دو یا چند عامل به طور همزمان مورد بررسی قرار گیرند که در این موارد طرح‌های عاملی[۲] کاربرد گسترده‌ای دارند و معمولاً با هدف مطالعه تأثیر تغییر سطوح عوامل مختلف بر روی متغیر پاسخ به کار می‌روند. به عنوان اولین قدم

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه اصفهان

[۲] Factorial designs

در این آزمایش‌ها بر پایه تجربه و دانسته‌های موجود از فرآیند تحت مطالعه، عوامل مختلفی که ممکن است روی متغیر پاسخ تأثیرگذار باشند مشخص می‌شوند. برخی از این عوامل مانند نوع مواد به کار رفته در یک محصول، کیفی و بعضی نیز مانند درجه حرارت، کمی هستند.

یکی از کلاس‌های مهم طرح‌های عاملی، طرح‌هایی هستند که برای بررسی f عامل دو سطحی در 2^f اجرا استفاده می‌شوند. این طرح‌ها به عنوان طرح‌های عاملی 2^f شناخته می‌شوند و به دلیل اینکه هر عامل تنها دو سطح دارد، برای بررسی اثر خطی عوامل بر روی متغیر پاسخ به کار می‌روند.

با افزایش تعداد عوامل آزمایش تعداد اجراهای لازم برای انجام طرح‌های عاملی کامل 2^f به سرعت افزایش می‌یابد، این مسأله استفاده از این طرح‌ها را دربسیاری از مواقع، بخصوص در مواردی که اجراها پر هزینه یا زمانگیر هستند، غیرممکن می‌سازد. در چنین مواردی می‌توان با انتخاب زیر مجموعه‌ای از اجراهای طرح عاملی کامل، تعدادی از اثرات مهم را برآوردکردکه این امر به انجام طرح‌های عاملی کسری[۱] منتهی می‌شود.

طرح‌های عاملی کسری با عوامل دو سطحی کاربرد وسیعی در آزمایش‌های غربال‌ساز و دیگر بررسی‌های علمی دارند[٦]. به منظور نمایش یک طرح کسری n اجرایی برای مطالعه f عامل دو سطحی، معمولاً از یک ماتریس $X_{(n\times f)}$ شامل نشانه‌های ۱+ و ۱− استفاده می‌شود. در این گونه ماتریس‌ها هر ستون متناظر با یک عامل، هر نشانه یک سطح عاملی و هر سطر نشان‌دهنده یک ترکیب از سطوح عاملی است.به طور کلی یک طرح 2^{f-q} را به عنوان کسر 2^{-q} طرح عاملی کامل 2^f، به صورت یک طرح عاملی کسری شامل f عامل دو سطحی و 2^{f-q} اجرا تعریف می‌شود. برای تشکیل چنین طرحی نیاز به انتخاب q مولد مستقل است. رابطه معرف در این طرح‌ها شامل q مولد مستقل و 2^q-q-1 اثر متقابل تعمیم‌یافته آن‌ها است. هر عبارت رابطه معرف یک واژه معرف نامیده می‌شود و تعداد حروف هر واژه، معرف طول آن واژه معرف است. گروه تشکیل شده به وسیله 2^q-1 واژه معرف به عنوان زیرگروه مقابله معرف شناخته می‌شود، این گروه شامل 2^q-1 واژه معرف به اضافه بردار I است. طرح‌های کسری منظم با استفاده از روابط معرف ساخته می‌شوند و الگوی هم‌اثری سرراستی دارند، به بیان روشن‌تر در این گونه طرح‌ها اثرات یا کاملاً مخلوط شده‌اند و تفکیک‌پذیر نیستند و یا می‌توانند به طور مستقل برآورد شوند. طرح‌های کسری که از چنین ویژگی‌هایی برخوردار نباشند را طرح‌های کسری نامنظم می‌نامند[۸]. در این مقاله طرح‌های کسری دو سطحی منظم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

[۱]Factional factorial designs

یکی از مسائل اساسی که در استفاده از طرح‌های کسری منظم دنبال می‌شود، چگونگی انتخاب طرح بهینه از میان طرح‌های کسری دارای تعداد اجرای مساوی است. برای انتخاب طرح‌های کسری منظم تاکنون معیارهای متعددی معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به معیارهای بیشینه وضوح[1][۱] کمینه انحراف[2][۵]، بیشترین ظرفیت برآورد[3][۷] شاخص برآورد [4][۳] اشاره کرد .

قسمت‌های مختلف مقاله حاضر به شرح زیر تنظیم شده است. در بخش۲ به معرفی معیار کمینه انحراف برای مقایسه طرح‌های کسری منظم می‌پردازیم. در بخش۳ معیار بیشترین ظرفیت برآورد معرفی می‌شود. در بخش٤ نیز به معرفی معیار شاخص برآورد خواهیم پرداخت و در بخش۵ ارتباط سه معیار مذکور را مورد مطالعه قرار می-دهیم. در خلال مباحث مطرح‌شده، مثال‌هایی را برای روشن شدن کاربرد معیارهای معرفی شده ارائه خواهیم کرد.

۲– معرفی معیار کمینه انحراف

نخستین معیار برای انتخاب طرح‌های کسری، معیار بیشینه وضوح است. وضوح یک طرح 2^{f-q} برابر طول کوتاه‌ترین واژه در رابطه معرف آن طرح، تعریف می-شود[۱]. طرح‌ها با وضوح کمتر واژه‌های معرف کوتاه‌تری دارند که در نتیجه آن اثرات مراتب پائین‌تر در این طرح‌ها هم‌اثر می‌شوند. از طرفی با توجه به اصل سلسله مراتبی بودن اثرات، اثرات مراتب پائین‌تر شانس بیشتری برای معنی‌دار بودن دارند. بنابراین انتخاب طرحی که موجب هم‌اثری اثرات مراتب پائین می‌شود مطلوب نیست. معیار بیشینه وضوح از بین طرح‌های رقیب، طرحی که دارای بیشترین وضوح ممکن باشد انتخاب می‌کند و به این ترتیب تا حد امکان از هم اثری اثرات مراتب پائین‌تر جلوگیری می‌شود. اما این معیار همواره قادر به شناسایی طرح بهینه از میان طرح‌های رقیب 2^{f-q} نمی‌باشد.

مثال ۱: یک تحلیلگر رفتار انسانی آزمایشی را برای مطالعه‌ی زمان تمرکز چشم اجرا می‌کند. او دستگاهی ساخته است که می‌تواند عوامل مورد نظر را در طول آزمایش کنترل کند. عواملی که وی آنها را مهم می‌گیرد، سوی چشم (A) ، فاصله هدف تا چشم (B) ، شکل هدف (C) ، میزان نور (D) ، اندازه هدف (E) ، چگالی هدف (F) و آزمودنی (G) هستند. برای هر عامل دو سطح را در نظر گرفته است و به دلیل تعداد نسبتاً زیاد عوامل، کسر یک چهارم طرح 2^7 را اجرا می‌کند. این طرح شامل ۳۲ اجراست و آن را کسر عاملی 2^{7-2} می‌نامند. برای تشکیل چنین طرحی نیاز به ۲ مولد مستقل است. آزمایشگر باید در انتخاب مولدها به گونه‌ای که اثرات مراتب پایین با یکدیگر هم‌اثر نشوند، محتاط باشد. برای

[1] Maximum Resolution
[2] Minimum aberration
[3] Maximum capacity estimation
[4] Index estimation

این منظور دو طرح 2^{7-2} زیر را در نظر می‌گیرد. در طرح D_1 ، $I = DEFG$ و $I = ABCDF$ را به عنوان مولد-های طرح انتخاب می‌کند. در اینجا اثر متقابل تعمیم‌یافته مولدها به صورت $ABCEG$ است. بنابراین رابط معرف کامل برای این طرح،

$$D_1 : I = DEFG = ABCDF = ABCEG,$$

است و به طریق مشابه رابطه معرف کامل طرح D_2 را به صورت زیر به دست آورده،

$$D_2 : I = ABCF = ADEG = BCDEFG.$$

سوالی که مطرح می‌شود این است که کدام یک از این دو طرح ۳۲ اجرایی بهترهستند؟ هر دو طرح فوق دارای وضوح IV می‌باشند، اما الگوی طول واژه آن‌ها متفاوت است. فرض کنید A_i نشان دهنده تعداد واژه‌های با طول i در رابطه معرف یک طرح کسری منظم باشد. در این صورت بردار $W = (A_3, \dots, A_f)$ الگوی طول واژه این طرح نامیده می‌شود. بنابراین برای پاسخ به این سوال به الگوی طول واژه آنها توجه می‌کنیم:

$$W(D_1) = (0,1,2,0,0),$$

و

$$W(D_2) = (0,2,0,1,0) .$$

به این ترتیب طرح D_1 دارای سه زوج اثرات متقابل دو عاملی هم‌اثر، یعنی DE و FG، DF و EG و در نهایت DG و EF، است و در مقابل طرح D_2 دارای شش زوج اثرات متقابل دو عاملی هم‌اثر می‌باشد. دلیل این امر این است که D_1 تنها یک واژه معرف به طول چهار دارد در حالی که D_2 دارای دو واژه معرف به طول چهار است.□

بنابراین طرح‌های دارای وضوح یکسان ممکن است به یک اندازه مطلوب نباشند. به همین دلیل فرایز و هانتر[۵] معیار کمینه انحراف را برای تشخیص بهتر طرح‌های بهینه ازمیان طرح‌های کسری منظم پیشنهاد کردند. این معیار با استفاده ازالگوی طول واژه طرح‌های منظم تعریف می‌شود.

تعریف۱: دو طرح کسری منظم، 2^{f-q}، مانند D_1 و D_2، را به ترتیب با الگوی طول واژه $W(D_1)$ و $W(D_2)$ در نظر بگیرید و فرض کنید r کوچکترین عدد صحیحی باشد که برای آن $A_r(D_1) \neq A_r(D_2)$ است.در این صورت گفته می‌شود طرح D_1 دارای انحراف کمتری نسبت به طرح D_2 است اگر داشته باشیم:

$$A_r(D_1) < A_r(D_2),$$

همچنین اگر هیچ طرح 2^{f-q} دیگری با انحراف کمتر از D_1 وجود نداشته باشد، D_1 طرح دارای کمینه انحراف خواهد بود.

برای f و q مفروض، طرح دارای کمینه انحراف همواره وجود دارد. استفاده از این معیار را می‌توان مشابه استفاده از معیار بیشینه وضوح، با استفاده از اصل سلسله مراتبی بودن اثرات توجیه نمود. زیرا هر چه تعداد واژه‌های با

طول کوتاه در یک طرح کاهش یابد، اثرات مراتب پائین کمتری در آن طرح هم‌اثر می‌شوند. با استفاده از معیار کمینه انحراف هر دو طرح مختلف 2^{f-q} را می‌توان رتبه‌بندی کرد. برای مثال با استفاده از معیار کمینه انحراف، طرح D_1 در مثال ۱ بهتر از طرح D_2 می‌باشد.

یکی از بهترین معیارهای مقایسه طرح‌های کسری، معیار بیشترین ظرفیت برآورداست. این معیارکه توسط سان[۷] ارائه شده است، برای مقایسه طرح‌های کسری نیازی به وجود روابط معرف دربین اثرات آن‌ها ندارد و به همین دلیل نسبت به معیارهای وضوح و کمینه انحراف که برپایه الگوی طول واژه طرح‌های کسری منظم استوار شده‌اند، از کارایی بیشتری برخورداراست و می‌تواند برای مقایسه طرح‌های کسری نامنظم نیز به کاررود.

۳– بیشترین ظرفیت برآورد

طرح D را با n اجرا و f عامل دو سطحی در نظر بگیرید. در این طرح $s=\binom{f}{2}$ اثر متقابل دو عاملی وجود دارد. فرض کنید $\mathcal{M}_k(D)$ کلاس تشکیل شده از کلیه مدل‌های شامل اثر ثابت، f اثر اصلی و k اثر متقابل دو عاملی، $1\le k\le s$، در طرح D باشد. بنابراین کلاس $\mathcal{M}_k(D)$ شامل $v=\binom{s}{k}$ مدل است که هر یک از آن‌ها $1+f+k$ پارامتر دارند. w- امین مدل عضو کلاس $\mathcal{M}_k(D)$ به شکل زیر است:

$$E(Y)=X_1\beta_1+X_{2(w)}\beta_{2(w)},$$

$$Var(Y)=\sigma^2 I_n,$$

که در آن، $w=1,2,\dots,v$ و بردار $n\times 1$، y بردار مشاهدات می‌باشد، β_1 بردار $(f+1)\times 1$ شامل اثر ثابت و پارامترهای مربوط به اثرات اصلی عوامل بوده و $\beta_{2(w)}$ نیز بردار $k\times 1$ شامل پارامترهای مربوط به k اثر متقابل دو عاملی مشمول در مدل مورد اشاره است. همچنین ماتریس X_1 به ترتیب شامل بردار 1_n و ستون‌های ضرایب مقابله اثرات اصلی است و ماتریس $X_{2(w)}$ نیز شامل ستون‌های ضرایب مقابله اثرات متقابل دو عاملی مشمول در این مدل می‌باشد و در نهایت σ^2 یک پارامتر نامعلوم است. فرض کنید $X_{(w)}=\left[X_1 \vdots X_{2(w)}\right]$ باشد در این صورت w- امین مدل عضو کلاس $\mathcal{M}_k(D)$ برآوردپذیر است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\text{رتبه}\left(X_{(w)}\right)=1+f+k,$$

که رابطه فوق معادل $det\left(X_{(w)}^T X_{(w)}\right)>0$ است **.**

ظرفیت برآورد طرح D، $E_k(D)$ ، به صورت نسبت مدل‌های برآوردپذیر در بین مدل‌های شامل همه اثرات اصلی و k اثر متقابل دو عاملی تعریف می‌شود. به این ترتیب داریم:

$$E_k(D)=\frac{1}{\binom{s}{k}}\sum_{u=1}^{v} I\left(det\left(X_{(w)}^T X_{(w)}\right)\right),$$

که $I\left(det\left(X_{(w)}^{T}X_{(w)}\right)\right)$ در آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I\left(det\left(X_{(w)}^{T}X_{(w)}\right)\right) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } det\left(X_{(w)}^{T}X_{(w)}\right) > 0 \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } det\left(X_{(w)}^{T}X_{(w)}\right) = 0 \text{ باشد} \end{cases}$$

دنباله ظرفیت برآورد طرح D نیز به صورت بردار زیر تعریف می‌گردد:

$$EC(D) = \left(E_1(D), E_2(D), \dots, E_{\binom{f}{2}}(D)\right).$$

واضح است که هرچه مقادیر $E_k(D)$ در یک طرح بالاتر باشند، آن طرح از مطلوبیت بیشتری برخوردار خواهد بود. سان[۷]، برهمین مبنا معیار دنباله ظرفیت برآورد را برای مقایسه طرح‌های عاملی مطرح کرد. بر اساس این معیار، می‌گوئیم طرح D_1 برتر از طرح D_2 است اگر برای همه $1 \le k \le \binom{f}{2}$، داشته باشیم:

$$E_k(D_1) \ge E_k(D_2),$$

و دست‌کم برای یک k، نامساوی فوق اکید باشد.

در یک طرح 2^{f-q}، مانند D، با وضوح III یا بالاتر، از میان $2^f - 1$ اثر عاملی طرح، $2^q - 1$ اثر عاملی در رابطه معرف ظاهر می‌شوند. $2^f - 2^q$ اثر عاملی باقی‌مانده طرح نیز در $g = 2^{f-q} - 1$ مجموعه هم‌اثری که هر یک 2^q عضو دارند، جای می‌گیرند. از میان g مجموعه هم‌اثری مورد اشاره، f مجموعه هم‌اثری شامل اثرات اصلی هستند. حال فرض کنید $l = g - f$ بوده و l مجموعه هم‌اثری که شامل اثرات اصلی نیستند عبارت از $M_1, M_2, \dots, M_l$ باشند. همچنین فرض کنید f مجموعه هم‌اثری شامل اثرات اصلی به صورت $M_{l+1}, M_{l+2}, \dots, M_g$ هستند. حال $m_i(D)$، $1 \le i \le g$، را برابر تعداد اثرات متقابل دو عاملی عضو گروه هم اثری M_i در نظر بگیرید. به این ترتیب عناصر غیرصفر مجموعه‌های $\{m_1(D), \dots, m_l(D)\}$ یا $\{m_{l+1}(D), \dots, m_g(D)\}$ نشان دهنده اندازه مجموعه‌های هم‌اثری شامل اثرات متقابل دو عاملی هستند که به ترتیب با اثرات اصلی هم‌اثر نمی‌باشند یا با اثرات اصلی هم‌اثر هستند.

در هر طرح 2^{f-q}، D با وضوح III و بالاتر تعداد $3A_3(D)$ اثر متقابل دو عاملی وجود دارد که با اثرات اصلی هم‌اثر هستند. زیرا که با رجوع به هر واژه به طول ۳، مانند ABC، از رابطه معرف طرح D می‌توانیم سه اثر متقابل دو عاملی، AB، AC و BC، را که با اثرات اصلی هم‌اثر هستند، تشخیص دهیم. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=l+1}^{g} m_i(D) = 3A_3(D),$$

و به این ترتیب تعداد اثرات متقابل دو عاملی طرح D که با اثرات اصلی هم‌اثر نیستند به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{l} m_i(D) = \binom{f}{2} - 3A_3(D), \qquad (۱)$$

علاوه بر رابطه فوق، داریم:

$$A_4(D) = \frac{1}{6}\{\sum_{i=1}^{g} m_i(D)^2 - \binom{f}{2}\}, \qquad (۲)$$

طبق تعریف در طرح کمینه انحراف، $A_3(D)$ کمترین است و $A_4(D)$ طرح‌هایی که $A_3(D)$ کمینه دارند، کمترین می‌باشد. با استفاده از روابط(۱)و(۲) قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه۱- در طرح کمینه انحراف با وضوح III یا بالاتر، $\sum_{i=1}^{l} m_i(D)$ (تعداد اثرات متقابل دو عاملی که با اثرات اصلی هم اثر نشده‌اند) بیشینه است و در بین طرح‌ها با بیشینه تعداد $\sum_{i=1}^{l} m_i(D)$، مقدار $\sum_{i=1}^{g} m_i(D)^2$ برای طرح کمینه انحراف، کمترین می‌باشد.[٤]□

بنابراین می‌توان گفت در یک طرح کمینه انحراف نه تنها $\sum_{i=1}^{l} m_i(D)$ بیشینه می‌شود بلکه دارای $m_l(D), \dots, m_1(D)$ یکنواخت نیز هست به عبارت دیگر در طرح کمینه انحراف $m_i(D)$ ها با فاصله کمی از هم تغییر می‌کنند. از آنجایی که طرح دارای بیشترین ظرفیت برآورد نیز در این تعریف صدق می‌کند می‌توان نتیجه گرفت کمینه انحراف جانشین خوبی برای معیار بیشترین ظرفیت برآورد است[٤].

۴- شاخص برآورد

طرح عاملی کسری منظم 2^{f-q}، با نماد D، $2^{f-q}-1$ مجموعه‌ی هم‌اثر دارد. فرض کنید $\rho_i(D)$، برای $i = 1,2,\dots,2^{f-q}-1$ طول کوتاهترین واژه در i-امین مجموعه‌ی هم اثر باشد. طول یک مجموعه‌ی هم اثر، طول کوتاهترین واژه در مجموعه‌ی هم اثر تعریف می‌شود. بنابراین شاخص برآورد طرح D [۳]، عبارت است از:

$$\rho(D) = max\{\rho_i(D), i = 1,2,\dots,2^{f-q}-1\}$$

مثال۲: دو طرح 2^{6-2} با الگوهای طول واژه و روابط معرف زیر را در نظر بگیرید:

$$D_۱ : I = ABCE = BCDF = ADEF$$
$$W(D_۱) = (۰,۳,۰,۰),$$

$$D_۲ : I = ABC = ADEF = BCDEF$$
$$W(D_۲) = (۱,۱,۱,۰),$$

D_1 طرحی با وضوح IV است و دارای کمینه انحراف می‌باشد. این طرح دارای شاخص برآورد سه است زیرا شش مجموعه‌ی هم اثری با طول یک، هفت مجموعه‌ی هم اثری با طول دو و دو مجموعه‌ی هم اثری با طول سه دارد و در مقابل طرح D_2 با وضوح III دارای شاخص برآورد دو است. دلیل این امر این است که D_2، شش مجموعه‌ی هم اثری با طول یک و نه مجموعه‌ی هم اثری با طول دو دارد.□

در هر طرح با وضوح III و بالاتر، شرط لازم و کافی برای $m_i(D) > 0$ ،$1 \le i \le l$ (به عبارت دیگر وجود حداقل یک اثر متقابل دو عاملی در هر مجموعه‌ی هم اثری که شامل اثرات اصلی نیست) این است که $\rho(D) = 2$ باشد[۲].

۵-کمینه انحراف، بیشترین ظرفیت برآورد و شاخص برآورد

در این قسمت ارتباط سه معیار کمینه انحراف، بیشترین ظرفیت برآورد و شاخص برآورد را مورد بررسی قرار می‌دهیم[۳]. برای این منظور جدول زیر را در نظر بگیرید. این جدول مقادیر $m_i(D)$، $1 \le i \le l$، را برای طرح‌های کمینه انحراف ۳۲ اجرایی با $9 \le f \le 29$ نشان می‌دهد.

جدول ۱- $m_1(D), \dots, m_l(D)$ برای طرح‌های $2^{f-(f-5)}$ کمینه انحراف با $9 \le f \le 29$

R و ρ به ترتیب نشان دهنده وضوح و شاخص برآورد هستند

f	R	ρ	l	$m_1(D), \dots, m_l(D)$
۹	٤	۳	۲۲	۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۱،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،۲،٤،۰
۱۰	٤	۲	۲۱	۲،۵
۱۱	٤	۳	۲۰	٤،٤،٤،٤،٤،٤،٤،٤،۰،۰،۰،۰،۰،۳،۳،۳،۳،۳،٤،٤
۱۲	٤	۳	۱۹	٤،٤،٤،٤،٤،٤،٤،٤،٤،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۰،۰،۰،۰
۱۳	٤	۳	۱۸	۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،۵،٦،٦،٦،۰،۰،۰
۱٤	٤	۳	۱۷	٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،٦،۷،۰،۰
۱۵	٤	۳	۱٦	۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۷،۰
۱٦	٤	۲	۱۵	۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸
۱۷	۳	۲	۱٤	۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸
۱۸	۳	۲	۱۳	۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۹
۱۹	۳	۲	۱۲	۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۸،۹،۹،۹
۲۰	۳	۲	۱۱	۸،۸،۸،۸،۸،۹،۹،۹،۹،۹،۹
۲۱	۳	۲	۱۰	۹،۹،۹،۹،۹،۹،۹،۹،۹،۹
۲۲	۳	۲	۹	۸،۸،۱۰،۱۰،۱۰،۱۰،۱۰،۱۰،۱۱
۲۳	۳	۲	۸	۸،۱۱،۱۱،۱۱،۱۱،۱۱،۱۱،۱۱
۲٤	۳	۲	۷	۱۲،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲
۲۵	۳	۲	٦	۱۲،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲
۲٦	۳	۲	۵	۱۳،۱۲،۱۲،۱۲،۱۲
۲۷	۳	۲	٤	۱۲،۱۳،۱۳،۱۳
۲۸	۳	۲	۳	۱٤،۱٤،۱٤
۲۹	۳	۲	۲	۱٤،۱٤

برای $16 \leq f \leq 21$ و $24 \leq f \leq 29$ مقادیر $m_i(D)$ طرح‌های $2^{f-(f-5)}$ با کمینه انحراف تا حد امکان یکنواخت هستند. بنابراین در این طرح‌ها $E_k(D)$، برای همه‌ی kها بیشینه می‌شوند. این مطلب برای $f = 22,23$ نیز درست است. به عبارت دیگر برای $f \geq 16$ طرح‌های کمینه انحراف ۳۲ اجرایی همیشه دارای بیشترین ظرفیت برآورد هستند و این همان نتیجه‌ای است که در قضیه ۱ بیان شد.

در جدول (۱)، $m_i(D)$ها برای همه طرح‌های کمینه انحراف با $f \geq 16$ مثبت هستند. این به این معنی است که حداقل یک اثر متقابل دو عاملی در هر مجموعه هم اثری که شامل اثرات اصلی نیست، وجود دارد. چنین طرح‌هایی می‌توانند مدل‌ها با $l = 2^{f-q} - f - 1$ اثر متقابل دو عاملی را برآورد کنند به عبارت دیگر تمام درجه آزادی قابل دسترس برای برآورد اثرات متقابل دو عاملی استفاده می‌شود. در این جدول برای طرح‌های کمینه انحراف ۳۲ اجرایی با وضوح IV، $E_k(D)$ برای تمام kها بیشینه نمی‌شود. در بیشتر این طرح‌ها با $f \leq 15$ برخی $m_i(D)$ها صفر می‌باشند. برای مثال، در طرح کمینه انحراف 2^{11-6}، ۱۵ تا $m_i(D)$ها غیر صفر و ۵ تا از آنها صفر هستند. چنین طرحی حداکثر ۱۵ اثر متقابل دو عاملی را برآورد می‌کند، در حالی که ۲۰ درجه آزادی قابل دسترس برای برآورد اثرات متقابل دو عاملی وجود دارد. اگرچه $m_i(D)$های غیر صفر برای طرح کمینه انحراف تقریباً برابر هستند اما صفر بودن برخی از آن‌ها مانع از بیشینه شدن $E_k(D)$ برای تمامkها می‌شود. بنابراین می‌توان گفت کمینه انحراف و بیشترین ظرفیت برآورد همیشه بر هم منطبق نیستند.

همانگونه که در جدول ۱ مشاهده شد، طرح‌های کمینه انحراف با وضوح III در بین همه طرح‌ها دارای بیشترین ظرفیت برآورد هستند در حالیکه طرح‌های کمینه انحراف با وضوح IV به طور کلی دارای بیشترین ظرفیت برآورد نیستند.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با معرفی معیارهای کمینه انحراف، بیشترین ظرفیت برآورد، شاخص برآورد، با ارائه مثال‌هایی از طرح‌های کسری منظم آن‌ها را مقایسه و رتبه‌بندی کردیم. از نقطه نظر آماری در طرح کمینه انحراف، تعداد واژه‌های با طول کوتاه کاهش می‌یابد و اثرات مراتب پایین کمتری در این طرح هم‌اثر می‌شوند. بنابراین معیار کمینه انحراف معیار مناسبی برای مقایسه طرح‌های کسری منظم است. لازم به ذکر است، معیارهای دیگری برای انتخاب طرح‌های کسری منظم وجود دارد که از آن جمله می‌توان به معیارهای بیشترین ظرفیت برآورد، شاخص برآورد اشاره کرد.

در پایان این مقاله با ارائه جدولی از طرح‌های کمینه انحراف ۳۲ اجرایی، این طرح‌ها را از نقطه نظر ظرفیت برآورد و شاخص برآورد مورد ارزیابی قرار دادیم. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت، طرح‌های کمینه انحراف لزوماً دارای بیشترین ظرفیت برآورد نیستند. از این رو برای ساختن و اصلاح معیاری که بتواند ظرفیت برآوردی طرح‌ها را واقعی‌تر بیان کند نیاز به تحقیق بیشتری وجود دارد.

منابع

[1]..Box, G. E. P., and Hunter, J. S., (1961). The 2^{k-p} fractional factorial designs, I, II, Technometrics, 3, 311-351; 449-458.

[2]. Chen, H. H., and Cheng, C. S., (2012). Minimum aberration and related criteria for fractional factorial designs, In Klaus Hinkelmann, Design andAnalysis of Experiments, 3, John Wiley, 299-322.

[3].Chen, H. H., and Cheng, C. S., (2004). Aberration, estimation capacity and estimation index, Statist. Sinica, 14, 203-215.

[4].Cheng, C. S., Steinberg, D. M., and Sun, D. X., (1999). Minimum aberration and model robustness for tow-level fractional factorial designs, J. R. Statist. Soc. B, 61, 85-93.

[5].Fries, A., and Hunter, W. G., (1980). Minimum aberration 2^{k-p} designs, Technometrics, 22, 601-608.

[6].Montgomery, D. C., (2009). Design and Analysis of Experiments, The seventh Edition, John Wiley and Sons, New York.

[7].Sun, D. X., (1993). Estimation Capacity and Related Topics in Experimental Design, Ph.d. Dissertation, University of Waterloo, Waterloo.

[8].Wu, C. F. J., and Hamada, M., (2000). Experiments: Planning, Analysis, and Parameter design Optimization, John Wiley and Sons, New York.