بررسی توزیع تعداد مولفه های سالم سیستم منسجم با فرض کار کردن سیستم

محمد جریره[۱]، سبحان صفوی منش[۲]
[۱] گروه آمار، دانشگاه لرستان
[۲] گروه مکانیک، دانشگاه یاسوج

چکیده

در این مقاله، توزیع و امید ریاضی تعداد مؤلفه های سالم در یک سیستم k از $n:G$ و برخی از ویژگی امید ریاضی آن بررسی شده است. همچنین توزیع تعداد مؤلفه های سالم در سیستم های متوالی خطی k از $n:G$ و سیستم‌های k از $n:F$ بدست آمده است و در نهایت نتایج به سیستم های منسجم با هر بردار علامت دلخواه تعمیم داده شده است.

واژه‌های کلیدی: بردار علامت، سیستم k از $n:G$، سیستم متوالی خطی k از $n:G$.

۱ مقدمه

سیستم های متوالی k از n اهمیت ویژه ای در تئوری قابلیت اعتماد دارد، آنها برای مدل و طرح های بهینه پایهی مهندسی سیستم های مختلف همانند میکرو ویو، پایگاههای الکترومغناطیس، شبکه های ارتباطی و سیستم های لوله کشی نفت و... استفاده می شود. سیستم های متوالی k از n در چانگ و همکاران [۴] و کاو و زوف [۱۵] معرفی شده است. برای نتایج اخیر می توان به چو و هاکس [۶]، تریانتافیلو و کوتراس [۲۶]، اریلماز [۹] و چن و هوانگ [۵] می توان مراجعه کرد.

ویژگی های قابلیت اعتماد دینامیکی سیستم های متوالی k از n موضوع فعالیت های مختلفی بوده است. چن و هوانگ [۵] توزیع طول عمر سیستم متوالی k از n، برای مؤلفه هایی با طول عمر مستقل و مشابه بررسی کرده اند. اکی و هیرانو [۱] توزیع طول عمر سیستم های متوالی k از $n:F$ را بصورت ترکیبی متناهی از توزیعهای آماره های ترتیبی طول عمرهای مؤلفه ها، با طول عمرهای

مستقل و هم توزیع، نوشتند. بولاند و سامانیگو[۳] و اریلماز [۸] نتایج ترتیب های تصادفی را برای طول عمر سیستم های متوالی k از n، ارائه دادند.

توزیع طول عمر سیستم های k از n : F با طول عمرهای تبادل‌پذیر مؤلفه ها بوسیله شانتی کومار [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. اریلماز [۱۱] طول‌های شرطی سیستم‌های متوالی k از n را مورد بحث قرار داد. صالحی و همکاران [۲۱]، میانگین طول عمر باقیمانده سیستم‌های متوالی k از n را مورد بررسی قرار دادند. ناوارو و اریلماز [۱۸] تابع میانگین طول عمر باقیمانده سیستم ها متوالی k از n متشکل از مولفه های تبادل‌پذیر بررسی کردند.

برخی نتایج برای آنالیز قابلیت دینامیکی سیستم های منسجم در مقاله پورسعید و نعمت الهی [۱۹] و توانگر و اسدی[۲۵] دیده می شود. صالحی و اسدی[۲۰] ، نتایجی بر روی مدت زمان سپری شده از خرابی ساختارهای $n-k+1$ از n با مولفه های نامشابه را بدست آورد.

اسدی و بایرامقلو [۲] تابع میانگین طول عمر باقیمانده یک ساختار k از n را بدست آورند و برخی از ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار دادند. ناوارو و هرناندز[۱۶] توابع میانگین عمر باقیمانده ترکیب‌های متناهی، آماره‌های ترتیبی و سیستم‌های منسجم را مورد بحث قرار دادند. برای مطالعه بیشتر در این خصوص می توانید به [۷]، [۱۰]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱. *(بردار علامت[۱])*

فرض کنید $T=\phi(X_1,..,X_n)$ طول عمر یک سیستم منسجم باشد، X_1،...،X_n طول عمرهای مستقل و هم توزیع مؤلفه های سیستم و F تابع توزیع مشترک طول عمرهای مؤلفه های سیستم باشد، آنگاه بردار علامت سیستم بصورت بردار احتمال $\boldsymbol{p}=(p_1,...,p_n)$ تعریف می شود بطوریکه i امین مؤلفه این بردار بصورت احتمال $P(T=X_{i:n})$ تعریف می شود.

بردار علامت سیستم برای اولین بار توسط سامانیگو [۲۲] معرفی شد که این امکان را می دهد تابع بقاء طول عمر سیستم را بصورت ترکیبی محدب از توابع بقاء آماره های مرتب طول عمر ها نوشت:

$$\overline{F}_T(t)=\sum p_{i=1}^{n}p_i\overline{F}_{i:n}(t). \qquad (1)$$

فرض کنید $T=\phi(X_1,...,X_n)$ طول عمر یک سیستم منسجم متشکل از مؤلفه های تبادل‌پذیر X_1،...،X_n باشد. $S_n(t)$، تعداد مؤلفه های سالم در زمان t را نشان می دهد؛ یعنی

$$S_n(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t),$$

بطوریکه

$$X_i(t)=\begin{cases}1 & X_i>t,\\ 0 & X_i\leq t.\end{cases}$$

متغیر تصادفی شرطی $\{S_n(t)|T>t\}$، برای فهمیدن رفتار سیستم مفید است. در بخش ۲ توزیع و متوسط مقدار متغیر تصادفی شرطی تعریف شده در (۱) برای سیستم های k از $n:G$ و برخی از ویژگی های امید ریاضی آن نیز بررسی شده است. در بخش ۳، توزیع شرطی $S_n(t)$ برای سیستم های متوالی خطی k از n بدست آورده شده است. در بخش ۴، این مسئله برای هر سیستم منسجم با هر بردار علامت دلخواه مطالعه شده است و فرمولهای گویا برای توزیع متناظر، با استفاده از مفهوم بردار علامت، ارائه شده است.

[۱] Signature

۲ تعداد مولفه‌های سالم در یک سیستم k از G:n

در این بخش، توزیع و امید ریاضی تعداد مؤلفه های سالم در یک سیستم k از $G:n$، تحت شرط اینکه سیستم در زمان t کار کند، بررسی می شود. ساختار k از n و تعمیم های آن، توجه زیادی از پژوهشگران را به سوی قابلیت اعتماد سیستم ها جذب کرده است، زیرا کاربردهای زیادی در سیستم های صنعتی مختلف دارند. سیستم k از $G:n$ به سیستمی گفته می شود n مؤلفه دارد و سیستم کار می کند اگر و تنها اگر حداقل k مؤلفه ی آن کار کند. در بسیاری از وضعیت های زندگی روزمره، مؤلفه های سیستم بطور متفاوت در سیستم توزیع شده اند و عمل کرد سیستم فقط به مؤلفه های سالم بستگی ندارد بلکه به توزیع تکی آنها نیز بستگی دارد.

فرض کنید $T=\phi(X_1,...,X_n)$ طول عمر یک سیستم با طول عمرهای مؤلفه های X_1،...،X_n و $S_n(t)$ تعداد مؤلفه های سالم سیستم در زمان t باشد؛ یعنی

$$S_n(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t),$$

بطوریکه

$$X_i(t)=\begin{cases}1 & X_i>t,\\ 0 & X_i\le t.\end{cases}$$

متغیر تصادفی شرطی

$$\{S_n(t)\,|T>t\}, \qquad (2)$$

تعداد مؤلفه های سالم سیستم را در زمان t، تحت شرط اینکه سیستم در زمان t کار کند، نشان می دهد؛ یعنی فرض می کنیم $P(T>t)>0$.

متغیر تصادفی شرطی (۲) بطور بالقوه برای فهمیدن رفتار یک سیستم روی زمان مفید است. فرض کنید سیستم بطور صحیح کار می کند اگر حداقل k مؤلفه ی آن بطور صحیح کار کند. اگر تعداد مؤلفه های سالم وقتی سیستم کار کند، نزدیک به k باشد بنابراین اپراتور می تواند یک شیوه نگهداری را اتخاذ کند، چون ممکن است سیستم در مدت زمان کوتاهی خراب شود. بنابراین محاسبه $E\{S_n(t)|T>t\}$ می تواند برای آنالیز و ارزیابی سیستم مفید باشد.

در بخش ۳، توزیع و امید ریاضی متغیر تصادفی شرطی (۲) را برای سیستم های متوالی k از n متشکل از مؤلفه های تبادل‌پذیر، بررسی شده است. در این بخش علاوه بر توزیع و امید ریاضی متغیر تصادفی شرطی (۲)، دو ویژگی از امید ریاضی متغیر تصادفی (۲) بررسی می شود. فرض کنید $X_1,...,X_n$ طول عمرهای مستقل و نامشابه مؤلفه های سیستم با $F_i(t)=P(X_i\le t)$، باشند. اگر $X_{1:n}$،...،$X_{n:n}$ آماره های ترتیبی متناظر X_1،...،X_n باشد. بنابراین $X_{n-k+1:n}$ طول عمر سیستم k از $G:n$ می باشد. متغیر تصادفی شرطی $\{S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t\}$، تعداد مؤلفه های سالم در زمان t را تحت شرط اینکه سیستم k از $G:n$ در زمان t کار کند، نشان می دهد.

قضیه ۱.۲. *برای $1\le k\le n$، داریم:*

$$P\{S_n(t)=m\,|X_{n-k+1:n}>t\}=\begin{cases}\frac{P(S_n(t)=m)}{P(S_n(t)\ge k)} & m\ge k,\\ 0 & m<k.\end{cases}$$

اثبات: احتمالات $P(S_n(t)=m)$ و $P(S_n(t)\ge k)=\sum_{i=k}^{n}P(S_n(t)=i)$ از روابط

بازگشتی زیر محاسبه می شود:

$$P(S_n(t)=m) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} F_i(t) & m=0, \\ P(S_n(t)=m-1)\overline{F_n}(t) & \\ +P(S_n(t)=m)\, F_n(t) & 0<m<n, \\ \prod_{i=1}^{n} \overline{F_i}(t) & m=n. \end{cases}$$

اثبات روابط بازگشتی فوق:

اگر $m=0$، از آنجایی که X_1،...،X_n مستقل و هم توزیع با توزیع F می باشند، داریم:

$$\begin{aligned} P(S_n(t)=0) &= P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i(t)=0\right\} \\ &= P(X_1(t)=0,...,X_n(t)=0) \\ &= P(X_1\le t).....P(X_n\le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F_i(t). \end{aligned}$$

اگر $0\le m\le n$،

$$P(S_n(t)=m) = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i(t)=m\right)$$
$$= P\left(S_{n-1}(t)=m-1, X_n(t)=1\right)$$
$$+ P\left(S_{n-1}(t)=m, X_n(t)=0\right)$$
$$= P(S_{n-1}(t)=m-1)P(X_n(t)=1)$$
$$+ P(S_{n-1}(t)=m)P(X_n(t)=0)$$
$$= P(S_{n-1}(t)=m-1)\overline{F}_n(t) + P(S_{n-1}(t)=m)F_n(t).$$

اگر $m=n$،

$$P(S_n(t)=n) = P\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i(t)=n\right\}$$
$$= P(X_1(t)=1,...,X_n(t)=1)$$
$$= P(X_1(t)>t)....P(X_n(t)>t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}_i(t).$$

اثبات قضیه: با توجه به اینکه پیشامد $\{X_{n-k+1:n}>t\}$ معادل با پیشامد $\{S_n(t)\ge k\}$ می باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &P\{S_n(t)=m|X_{n-k+1:n}>t\} \\ &= \frac{P\{S_n(t)=m, X_{n-k+1:n}>t\}}{P\{X_{n-k+1:n}>t\}} \\ &= \frac{P\{S_n(t)=m, S_n(t)\ge k\}}{P\{S_n(t)\ge k\}}. \end{aligned}$$

برای $m<k$،

$$\{S_n(t)=m, S_n(t)\ge k\}=\emptyset,$$

$$P\{S_n(t)=m, S_n(t)\ge k\}=0. \qquad (3)$$

برای $m\ge k$،

$$P\{S_n(t)=m, S_n(t)\ge k\} = P\{S_n(t)=m\}. \qquad (4)$$

بنابراین داریم:

$$P\{S_n(t)=m\,|X_{n-k+1:n}>t\} = \begin{cases} \frac{P\{S_n(t)=m\}}{P\{S_n(t)\ge k\}} & m\ge k, \\ 0 & m<k. \end{cases}$$

نتیجه ۱. *با توجه به قضیه فوق می توان نتیجه گرفت که:*

$$P\{S_n(t)=m\,|X_{n-k+1:n}>t\}=\begin{cases}\frac{P\{X_{n-m+1:n}>t\}-P\{X_{n-m:n}>t\}}{P\{S_n(t)\geq k\}} & m\geq k,\\ 0 & m<k.\end{cases}$$

اثبات: از آنجایی که

$$\begin{aligned}&P\{S_n(t)=m\}\\&=P\{S_n(t)\leq m\}-P\{S_n(t)\leq m-1\}\\&=P\{X_{n-m+1:n}>t\}-P\{X_{n-m:n}>t\}.\end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۳) و (۴)، نتیجه اثبات می شود.

قضیه ۲.۲. *برای $0\leq k\leq n$، داریم:*

$$\begin{aligned}&\psi(t)=E\{S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=k+\frac{1}{P\{X_{n-k+1:n}>t\}}\sum_{i=1}^{n-k}P\{X_{i:n}>t\}.\end{aligned}$$

اثبات: با توجه به اینکه پیشامدهای $\{S_n(t)\geq m\}$ و $\{X_{n-m+1:n}>t\}$ معادلند، لذا برای $m>k$، داریم:

$$P(X_{n-m+1:n}>t,X_{n-k+1:n}>t)=P(X_{n-m+1:n}>t),$$

و برای $m\leq k$،

$$P(X_{n-m+1:n}>t,X_{n-k+1:n}>t)=P(X_{n-k+1:n}>t).$$

همچنین داریم:

$$P\{S_n(t)\geq m|X_{n-k+1:n}>t\}=\begin{cases}\frac{P\{X_{n-m+1:n}>t\}}{P\{X_{n-k+1:n}>t\}} & m>k,\\ 1 & m\leq k.\end{cases}$$

از آنجایی که $\{S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t\}$ متغیر گسسته نامنفی است، داریم:

$$\begin{aligned}&E\{S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=\sum_{m=0}^{n}P\{S_n(t)\geq m|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=\sum_{m=0}^{k}P\{S_n(t)\geq m|X_{n-k+1:n}>t\}\\&+\sum_{m=k+1}^{n}P\{S_n(t)\geq m|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=E(S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t)\\&+\sum_{m=k+1}^{n}P\{S_n(t)\geq m|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=k+\frac{1}{P\{X_{n-k+1:n}>t\}}\sum_{m=k+1}^{n}P\{X_{n-m+1:n}>t\}\\&=k+\frac{1}{P\{X_{n-k+1:n}>t\}}\sum_{i=1}^{n-k}P\{X_{i:n}>t\}.\end{aligned}$$

تساوی چهارم در رابطه فوق به این علت برقرار است که برای سیستم های k از $n:G$ داریم:

$$\begin{aligned}&E(S_n(t)|X_{n-k+1:n}>t)\\&=k.P\{S_n(t)\geq k|X_{n-k+1:n}>t\}\\&=1.\end{aligned}$$

در ادامه، دو نتیجه ساده بر روی رفتار تابع ψ ارائه داده

می شود.

قضیه ۳.۲. $\psi(t) = E\{S_n(t)|X_{n-k+1:n} > t\}$، *تابعی ناصعودی از t می باشد.*

اثبات: توجه داشته باشید اگر X_1،...،X_n مستقل باشند، آنگاه $X_{i:n} \leq_{lr} X_{n-k+1:n}$ برای $i = 1, ..., n-k$ (شکید و شانتی کومار [۲۳]).

همچنین با استفاده از ارتباط بین ترتیب های تصادفی، داریم:

$$X_{i:n} \leq_{hr} X_{n-k+1:n}, \quad i = 1, ..., n-k.$$

اکنون بنابر تعریف ترتیب نرخ خطر می توان نتیجه گرفت که

$$\frac{P\{X_{i:n} > t\}}{P\{X_{n-k+1:n} > t\}}, \qquad i = 1, ..., n-k,$$

تابعی ناصعودی از t می باشد. در نتیجه تابع ψ تابعی ناصعودی از t است.

قضیه ۴.۲. *برای تمام $t > 0$، تابع ψ تابعی نانزولی از k است.*

اثبات: با توجه به روابط گفته شده داریم:

$$E\{S_n(t)|X_{n-k+1:n} > t\} = E\{S_n(t)|S_n(t) \geq k\}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} P(S_n(t) \geq m|X_{n-k+1:n} > t)$$
$$= k + \frac{P\{X_{n-k:n} > t\} + ... + P\{X_{1:n} > t\}}{P\{X_{n-k+1:n} > t\}}.$$

از آنجایی که $P\{X_{n-k+1:n} > t\} \geq P\{X_{n-k:n} > t\}$،

$$E\{S_n(t)|S_n(t) \geq k\} \leq k$$
$$+ \frac{P\{X_{n-k:n} > t\} + ... + P\{X_{1:n} > t\}}{P\{X_{n-k:n} > t\}}$$
$$= k + 1 + \frac{P\{X_{n-k-1:n} > t\} + ... + P\{X_{1:n} > t\}}{P\{X_{n-k:n} > t\}}$$
$$= E\{S_n(t)|S_n(t) \geq k+1\}.$$

این نشان می دهد ψ تابعی نانزولی از k است.

۳ تعداد مولفه‌های سالم در سیستم متوالی k از n

سیستم متوالی خطی k از $n : F$ به سیستمی گفته می شود که مؤلفه های آن بطور خطی بهم متصل اند و سیستم خراب می شود اگر و تنها اگر حداقل k مؤلفه ی متوالی آن خراب باشد. سیستم متوالی خطی k از $n : G$ به سیستمی گفته می شود که مؤلفه های آن بطور خطی بهم متصل اند و سیستم سالم است مادامی که حداقل k مؤلفه ی متوالی آن سالم باشد. یک دنباله از متغیر های تصادفی X_1،...،X_n تبادل‌پذیر گویند اگر برای هر n و هر جایگشت $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_n)$ از $\{1, 2, ..., n\}$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$P\{X_1 < x_1, ..., X_n < t_n\} = P\{X_{\pi_1} < t_1, ..., X_{\pi_n} < t_n\}.$$

یعنی، توزیع توأم (تابع بقاء) $X_1, ..., X_n$ در $x_1, ..., x_n$ متقارن است.

قضیه ۱.۳. *فرض کنید $X_1, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی دو مقداری تبادل‌پذیر باشند و*

$$\lambda_k = P(X_1 = 1, X_2 = 1, ..., X_k = 1), \qquad \lambda_0 = 1.$$

آنگاه تحت شرایط فوق، داریم:

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \sum_{k=0}^{n-k} (-1)^k \binom{n-r}{k} \lambda_{r+k},$$

و

$$P(Y = r) = \binom{n}{r} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{n-r}{k} \lambda_{r+k},$$

که $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ و $r = \sum_{i=1}^n x_i$.

اثبات: فرض کنید X_1،...،X_n طول عمرهای تعویض پذیر مؤلفه های یک سیستم منسجم با تابع توزیع توأم بطور مطلق پیوسته $F(t_1, ..., t_n)$ و تابع بقاء توأم $\overline{F}(t_1, ..., t_n)$ باشند.

همچنین تعریف کنید

$$f_t(a, b) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \binom{a}{i} F(t, ..., t, \infty, ..., \infty),$$

$$g_t(a, b) = \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \binom{a}{i} \overline{F}(t, ..., t, 0, ..., 0).$$

بنابراین توزیع کل مؤلفه های سالم در زمان t، بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &P(S_n(t) = m) \\ &= P\{X_1 > t, ..., X_m > t, X_{m+1} \leq t, ..., X_n \leq t\} \\ &+ ... + P\{X_{m+1} > t, ..., X_n > t, X_1 \leq t, ..., X_m \leq t\}. \end{aligned}$$

تعداد عبارات در مجموع فوق، $\binom{n}{m}$ می باشد و با استفاده از تعریف تبادل‌پذیری، داریم:

$$\begin{aligned} &P(S_n(t) = m) \\ &= \binom{n}{m} P\{X_1 > t, ..., X_m > t, X_{m+1} \leq t, ..., X_n \leq t\} \\ &= \binom{n}{m} f_t(m, n-m) = \binom{n}{m} g_t(n-m, m). \end{aligned} \qquad (۵)$$

اگر طول عمر های مؤلفه های سیستم مستقل و هم توزیع باشند، آنگاه $S_n(t) \sim Bin(n, P(X > t))$، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} &P(S_n(t) = m) \\ &= \binom{n}{m} (P(X > t))^m (1 - P(X > t))^{n-m}. \end{aligned}$$

تعداد راه های چیدن n مؤلفه با l خرابی و $n-l$ مؤلفه ی سالم در یک خط بطوریکه نه k و یا بیشتر از آن مؤلفه ی متوالی خراب نباشند، بوسیله $N(l, k, n)$ نمایش داده می شود. این تعداد بوسیله معادله ترکیبی زیر داده شده است (برای جزئیات بیشتر کاو و زو [۱۵] را ببینید).

$$\begin{aligned} &N(l, k, n) = \\ &\sum_{j-0}^{\min\{[\frac{l}{k}], n-l+1\}} (-1)^j \binom{n-l+1}{j} \binom{n-jk}{n-l}, \end{aligned}$$

که در آن $[x]$ جزء صحیح x می‌باشد.

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $T_{k|n:F}$ و $T_{k|n:G}$ بترتیب نشان دهنده ی طول عمرهای دو سیستم متوالی k از $n : F$ و k از $n : G$ متشکل از مؤلفه های تبادل‌پذیر باشند، آنگاه،*

(a)-

$$\begin{aligned} &P\{S_n(t) = m | T_{k|n:F} > t\} \\ &= \frac{N(n-m, k, n) f_t(m, n-m)}{\sum_{l=0}^n N(n-l, k, n) f_t(l, n-l)} \\ &= \frac{N(n-m, k, n) g_t(n-m, m)}{\sum_{l=0}^n N(n-l, k, n) g_t(n-l, l)}, m \geq k. \end{aligned}$$

$-(b)$

$$P\left\{S_n(t)=m|T_{k|n:G}>t\right\}$$
$$=\frac{\left\{1-\binom{n}{m}^{-1}\right\}N(m,k,n)\binom{n}{m}f_t(m,n-m)}{\sum_{l=0}^{n}\left(1-\binom{n}{l}^{-1}N(l,k,n)\right)\binom{n}{l}f_t(l,n-l)},m\geq k.$$

اثبات(a). اگر $L_n^{(1)}$ و $L_n^{(0)}$ ، بترتیب بزرگترین دنباله از موفقیت (مؤلفه های سالم) و بزرگترین دنباله از خرابی ها در یک دنباله ی دوتایی $X_1(t)$،...،$X_n(t)$ ، که حالات مؤلفه ها را در زمان t نشان می دهد، باشد. یک سیستم متوالی k از $n:F$ در زمان t کار می کند اگر k مؤلفه ی متوالی در زمان t وجود نداشته باشد؛ یعنی $\{T_{k|n:F}>t\}$ اگرو تنها اگر $\{L_n^{(0)}<k\}$، بنابراین داریم:

$$P\{S_n(t)=m|T_{k|n:F}>t\}=P\{S_n(t)=m|L_n^{(0)}<k\}$$
$$=\frac{P\{S_n(t)=m,L_n^{(0)}<k\}}{P\{L_n^{(0)}<k\}}.$$

از طرفی داریم:

$$P(S_n(t)=m,L_n^{(0)}<k)$$
$$=P(L_n^{(0)}<k|S_n(t)=m)P(S_n(t)=m).\qquad (۶)$$

تعداد پیشامد $\{L_n^{(0)}<k|S_n(t)=m\}$، (پیشامد اینکه سیستم در زمان t، m مؤلفه ی سالم و $n-m$ مؤلفه ی خراب داشته باشد بطوریکه k مؤلفه ی متوالی خراب نباشند) برابر با $N(n-m,k,n)$ است. بنابراین داریم:

$$P\{L_n^{(0)}<k|S_n(t)=m\}$$
$$=\frac{N(n-m,k,n)}{\binom{n}{n-m}}$$
$$=\frac{N(n-m,k,n)}{\binom{n}{m}}.$$

لذا معادله (۶) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$N(n-m,k,n)f_t(m,n-m)=N(n-m,k,n)g_t(n-m,n).$$

و طبق قانون احتمال داریم:

$$P\{L_n^{(0)}<k\}=\sum_{l=0}^{n}P\{L_n^{(0)}<k,S_n(t)=l\}.$$

قابل ذکر است اگر تعداد خرابی بزرگتر از $[\frac{n}{k}]$ باشد، آنگاه حداقل k مؤلفه متوالی خراب در سیستم وجود دارد در اینصورت سیستم خراب است. بنابراین اگر تعداد خرابی های متوالی در سیستم کمتر از $[\frac{n}{k}]$ یا $m\geq[\frac{n}{k}]$ باشد سیستم کار می کند. با جایگذاری کردن نتایج فوق، قسمت (a) قضیه اثبات می شود.

اثبات(b). بطور مشابه برای بقاء سیستم متوالی k از $n:G$ در زمان t، باید حداقل k مولفه سالم که متوالی هستند، در زمان t در سیستم وجود داشته باشد؛ یعنی $\{T_{k|n:G}>t\}$ اگرو تنها اگر $\{L_n^{(1)}\geq k\}$.

تعداد راههایی که m مؤلفه ی سالم و $n-m$ مؤلفه ی خراب را می توان درکنار هم چید بطوریکه نه k نه بیشتر از آن (حداکثر$k-1$) مؤلفه ی متوالی آن کار کند برابر

$N(m,k,n)$ است. بنابراین

$$P(S_n(t)=m|T_{n|k:G}>t)=P(S_n(t)=m|L_n^{(1)}\geq k)$$
$$=\frac{P(S_n(t)=m, L_n^{(1)}\geq k)}{P(L_n^{(1)}\geq k)}$$
$$=\frac{P(L_n^{(1)}\geq k|S_n(t)=m)P(S_n(t)=m)}{P(L_n^{(1)}\geq k)}.$$

از طرفی داریم:

$$P(L_n^{(1)})\geq k|S_n(t)=m)$$
$$=1-P\{L_n^{(1)}<k|S_n(t)=m\}$$
$$=1-\binom{n}{m}^{-1}N(m,k,n).$$

همچنین

$$P(L_n^{(1)}\geq k)$$
$$=\sum_{l=0}^{n}P(L_n^{(1)}\geq k, S_n(t)=l)$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\left(1-\binom{n}{l}^{-1}N(l,k,n)\right)P(S_n(t)=l).$$

لذا با استفاده از نتایج فوق، اثبات قضیه کامل می شود.

۴ نتایج برای سیستم‌های منسجم با هر بردار علامت دلخواه

تابع بقاء هر سیستم منسجم با طول عمر $T=\phi(X_1,...,X_n)$ و طول عمرهای تبادل‌پذیر مؤلفه های X_1،...،X_n که دارای تابع توزیع توأم بطور مطلق پیوسته می باشند، می تواند بصورت ترکیبی محدب از توابع بقاء سیستم های i از $n:F$ نوشته شود:

$$P(T>t)=\sum_{i=1}^{n}p_iP(X_{i:n}>t). \tag{۷}$$

بردار علامت سیستم با مؤلفه های تبادل‌پذیر بوسیله یافتن مجموعه های مسیر سیستم محاسبه میگردد. یعنی

$$p_m=a_{n-m+1}-a_{n-m},$$

$$a_m=\frac{r_m(n)}{\binom{n}{m}}.$$

جایی که $r_m(n)$ تعداد مجموعه های مسیری که دقیقاً m مؤلفه ی سالم دارند.

همچنین

$$r_m(n)=\binom{n}{m}\sum_{j=n-m+1}^{n}p_j. \tag{۸}$$

فرض کنید X_1،...،X_n طول عمرهای مؤلفه های یک سیستم منسجم باشد، بنابراین طول عمر یک سیستم i از $n:F$ بطور معادل سیستم $n-i+1$ از $n:G$ متناظر با متغیر تصادفی $X_{i:n}$ می باشد. تابع بقاء سیستم i از $n:F$ با مؤلفه هایی با طول عمرهای تبادل‌پذیر X_1،...،X_n بوسیله زیر نمایش داده می شود.

$$\overline{F}_{i:n}(t)$$
$$=1-\sum_{j=i}^{n}(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\binom{n}{j}P\{X_{j:j}\leq t\}$$
$$=\sum_{j=n-i+1}^{n}(-1)^{j-n+i-1}\binom{j-1}{n-i}\binom{n}{j}P\{X_{1:j}>t\}.$$

در ادامه، توزیع متغیر تصادفی شرطی $\{S_n(t)|T>t\}$، برای هر سیستم منسجم با طول عمر T برحسب بردار علامت سیستم ارائه داده می شود.

قضیه ۱.۴. *فرض کنید* $T=\phi(X_1,...,X_n)$ *طول عمر یک سیستم منسجم با بردار علامت* $\boldsymbol{p}=(p_1,...,p_n)$

باشد. اگر X_1،...،X_n دارای توزیع توأم تبادل‌پذیر بطور مطلق پیوسته باشند، آنگاه برای $m \le n$،

$$P\{S_n(t)=m|T>t\}$$
$$=\frac{P\{X_{n-m+1:n}>t\}-P\{X_{n-m:n}>t\}}{P(T>t)}\sum_{i=n-m+1}^{n}p_i.$$

بر اساس قرارداد $P(T_{0:n}>t)=0$.

اثبات: می توان نوشت:

$$P\{S_n(t)=m|T>t\}$$
$$=\frac{P\{S_n(t)=m,T>t\}}{P\{T>t\}}$$
$$=\frac{P(T>t|S_n(t)=m)P(S_n(t)=m)}{P(T>t)}.$$

پیشامد $(T>t|S_n(t)=m)$، برابر با اینکه «سیستم کار کند بشرط اینکه تعداد مؤلفه های سالم سیستم دقیقاً m باشد» با پیشامد «اینکه در سیستم مجموعه های مسیر دقیقاً m مؤلفه ی سالم دارند» معادل است، همچنین طبق معادله ی (۸)، واضح است که

$$P\{T>t|S_n(t)=m\}=\frac{r_m(n)}{\binom{n}{m}}=\sum_{i=n-m+1}^{n}p_i.$$

بنابراین داریم:

$$P(S_n(t)=m)=P\{X_{n-m+1:n}>t\}-P\{X_{n-m:m}>t\},$$

و با جایگزاری، قضیه اثبات می شود.

نتیجه ۲. *توزیع شرطی داده شده در قضیه‌ی ۱.۴ را می‌توان نیز بصورت زیر نوشت:*

$$P\{S_n(t)=m|T>t\}=\frac{P\{S_n(t)=m\}\sum_{i=n-m+1}^{n}p_i}{P\{T>t\}}.$$

بنابراین داریم:

$$E\{S_n(t)=m|T>t\}=\frac{1}{P\{T>t\}}E\{g(S_n(t))\},$$

که در آن

$$g(m)=m\sum_{i=n-m+1}^{n}p_i.$$

فرض کنید $\bar{p}_j=\sum_{i=j+1}^{n}p_i$، آنگاه می توان معادله (۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\bar{F}_T(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\bar{p}_j\binom{n}{j}F^j(t)\bar{F}^{n-j}(t). \qquad (۹)$$

اکنون قضیه ۱.۴ را برای سیستم هایی با طول عمرهای مستقل و هم توزیع مؤلفه ها، بررسی می کنیم.

نتیجه ۳. *فرض کنید T طول عمر یک سیستم منسجم با بردار علامت $\boldsymbol{p}=(p_1,...,p_n)$، باشد و همچنین فرض کنید $X_1,...,X_n$، طول عمر های مؤلفه های سیستم، مستقل و هم توزیع با توزیع F می باشند. آنگاه*

$$P(S_n(t)=n-m|T>t)=\frac{\binom{n}{m}\Phi^m(t)\overline{p}_m}{\sum_{j=0}^{n-1}\bar{p}_j\binom{n}{j}\Phi^j}, \qquad (۱۰)$$

که در آن $\Phi(t)=\frac{\overline{F}(t)}{F(t)}$.

اثبات: می دانیم تابع بقاء m امین آماره مرتب در حالت مستقل و هم توزیع، بصورت زیر می باشد:

$$P(X_{m:n}>t)=\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}F^j(t)\overline{F}^{n-j}(t).$$

آنگاه می توان آسانی دید که

$$P(S_n(t)=n-m)=\binom{n}{m}F^m(t)\overline{F}^{n-m}(t).$$

لذا طبق نتیجه ۲ و معادله (۱۰)، داریم:

$$P(S_n(t)=n-m|T>t)$$
$$=\frac{\binom{n}{m}F^m(t)\overline{F}^{n-m}(t)\sum_{i=m+1}^{n}p_i}{\overline{F}_T(t)}$$
$$=\frac{\binom{n}{m}\Phi^m(t)\overline{p}_m}{\sum_{j=0}^{n-1}\bar{p}_j\binom{n}{j}\Phi^j(t)}.$$

از قضیه۱.۴ می توان دید که توزیع شرطی $S_n(t)$ برای هر سیستم منسجمی با استفاده از بردار علامت آن می توان با آسانی محاسبه شود. اخیراً ناوارو و رابیو [۱۷] یک دستورالعمل برای محاسبه کردن بردار علامت سیستم های منسجم ارائه دادند و بردار های علامت سیستم های منسجم با پنج مؤلفه را محاسبه کردند.

مراجع

[1] Aki, S. and Hirano, K. (1996). Lifetime distributions and estimation problems of consecutive k-out-of-n:F systems. Ann. Inst. Stat. Math., 48, 185-199.

[2] Asadi, M., and Bayramoglu. I. (2006). The mean residual life function of a k-out-of-n structure at the system level. IEEE Trans. Reliab., 55, 314-318.

[3] Boland P. J. and Samaniego F. J. (2004). Stochastic ordering results for consecutive k-out-of n: F systems. IEEE Trans. Reliab., 53, 7-10.

[4] Chang, G. J., Cui, L. and Hwang, F. K. (2000). Reliabilities of Consecutive-k Systems. Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[5] Chen, R.W. and Hwang, F.K. (1985). Failure distributions of consecutive k-out-of-n:F systems. IEEE Trans. Reliab., R-34, 338-341.

[6] Cui, L. and Hawkes, A. G. (2008). A note on the proof for the optimal consecutive k-out-of-n:G line for n ≤ 2k. J. Stat. Plann. Infer., 138, 1516 -1520.

[7] David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003). Order Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics, New Jersey: Wiley.

[8] Eryılmaz, S. (2007). On the lifetime distribution of consecutive k-out-of-n:F system. IEEE Trans. Reliab., 56, 35-39.

[9] Eryılmaz, S. (2008). Consecutive k-out-of-n:G system in stress-strength setup. Comm. Stat. Simulat. Comput., 37, 579-589.

[10] Eryılmaz S. (2009). Reliability properties of consecutive k-out-of-n systems of arbitrarily dependent components. Reliab. Eng. Syst. Saf., 94, 350-356.

[11] Eryılmaz, S. (2010a). Number of working components in consecutive k-out-of-n system while it is working. Comm. Statist. Simulation Comput., 39, 683-692.

[12] Eryilmaz, S. (2010b). Conditional lifetime of consecutive k-out-of-n systems. IEEE Trans. Reliab., 59, 178-182.

[13] Eryilmaz, S. (2011). Dynamic behavior of k-out-of-n:G systems.Operations Research Letters, 39, 155-159.

[14] Kochar, S., Mukerjee, H. and Samaniego, F.J. (1999). The "signature" of a coherent system and its application to comparison among systems. Nav. Res. Logist., 46, 507-523.

[15] Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003). Optimal Reliab. Modeling. Principles and Applications. New York: John Wiley & Sons.

[16] Navarro, J. and Hernandez, P.J. (2008). Mean residual life functions of finite mixtures, order statistics and coherent systems. Metrika, 67, 277-298.

[17] Navarro, J. and Rubio, R. (2009). Computation of signatures of coheren systems with five components. Communication in Statistics: Simulation and Computation, 39, 68-84.

[18] Navarro, J. and Eryılmaz, S. (2007). Mean residual lifetimes of consecutive k-out-of-n systems. J. Appl. Probab., 44, 82-98.

[19] Poursaeed, M.H. and Nematollahi, A.R. (2008). On the mean past and the mean residual life under double monitoring. Comm. Stat. Theor. Meth., 37, 1119-1133.

[20] Salehi, E.T. and Asadi, M. (2011). Results on the past lifetime of (n-k+1)-out-of-n structures with nonidentical components. Metrika, 75, 439-454.

[21] Salehi, E.T., Asadi, M. and Eryilmaz, S. (2012). On mean residual lifetime of consecutive k-out-of-n systems. TEST, 21, 93-115.

[22] Samaniego F. J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. IEEE Trans. Reliab., R-34, 69-72.

[23] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1994). Stochastic Orders and their Applications. Academic Press, Boston.

[24] Shanthikumar, J. G. (1985). Lifetime distribution of consecutive k-out-of-n:F systems with exchangeable lifetimes. IEEE Trans. Reliab., R-34, 480-483.

[25] Tavangar, M. and Asadi, M. (2010). A study on the mean past lifetime of the components of n - k + 1-out-of-n system at the system level. Metrika, 72, 59-73.

[26] Triantafyllou, I.S. and Koutras, M.V. (2008). On the signature of coherent systems and applications. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 22, 19-35.