آشنایی با توزیعهای پایدار

داود فربد
گروه ریاضی، دانشگاه مهندسی فناوری های نوین قوچان

چکیده

در این مقاله، ضمن معرفی توزیع های پایدار، فرم های توابع چگالی آنها را مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس نمایشی از توابع چگالی پایدار و همچنین خواص این توزیع ها را بطور اجمالی مورد بررسی قرار داده و یك مثال واقعی ارائه می کنیم. در نهایت نیز برخی بسته های نرم افزار R در خصوص توزیع های پایدار ارائه می شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع های پایدار، شاخص پایداری (مولفه شاخص)، نرم افزار R.

۱ مقدمه

توزیعهای پایدار[۱] یك خانواده مهم از توزیعهای پیوسته احتمالی هستند که دارای خواص مهمی از جمله چولگی[۲] و دم سنگین[۳] بودن می باشند. نظریه توزیعهای پایدار برای اولین بار توسط لوی [۴] [۸] در سال ۱۹۲۴ در مطالعه قضیه حد مرکزی تعمیم یافته مشخص شد. به غیر از لوی، افراد زیادی از جمله خینچین[۵][۷]، فلر[۶][۵]، زولاتاریف[۷][۱۳] و نولان[۸] [۱۰] مطالعاتی را در زمینه توزیع های پایدار انجام داده اند. این توزیعها دارای چهار پارامتر هستند که عبارتند از:

- شاخص پایداری α [۹] ، $\alpha \in (0, 2]$،
- پارامتر چولگی β، $\beta \in [-1, 1]$،
- پارامتر مقیاس γ، $\gamma \in (0, \infty)$،
- پارامتر مکان δ، $\delta \in (-\infty, \infty)$.

نکته ۱. پارامتر α مهمترین پارامتر توزیعهای پایدار می‌باشد که شکل توزیع را مشخص می‌کند. در واقع هر چقدر α کوچکتر باشد دمهای توزیع سنگین تر می باشد.

چندین دلیل برای کاربرد توزیعهای پایدار وجود دارند

[۱] Stable Distributions
[۲] Skewness
[۳] Heavy tails
[۴] Levy
[۵] Khinchin
[۶] Feller
[۷] Zolotarev
[۸] Nolan
[۹] Index of Stability

که عبارتند از [۱۱]:

– قضیه حد مرکزی تعمیم یافته [۱۰]: توزیعهای پایدار، توزیع حدی مجموع های استاندارد شده ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع اند (با واریانس متناهی یا نامتناهی). در حالی که در قضیه حد مرکزی کلاسیک مجموع های استاندارد شده ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با واریانس متناهی به توزیع نرمال همگرا هستند [۶]، [۱].

– توزیعهای پایدار به دلیل چولگی و داشتن جرم احتمال زیاد در دمهای تابع چگالی، مدلهای مناسبی برای بسیاری از پدیده ها در مهندسی، نجوم، فیزیک، مخابرات، اقتصاد و مدلهای مالی هستند. قیمت سهام، زمانهای اصابت در یک حرکت براونی، نویز در یک سیستم مخابراتی، میدان گرانشی ستاره ها، مدل بندی داده های موجود در سیستمهای بیومولکولی مقیاس بزرگ، مثال هایی هستند که توزیع های پایدار، توزیعهای مناسبی برای مدلسازی آنها هستند. برای جزئیات بیشتر می توان به کتابهای زولاتاریف [۱۳] و آستولا و دانیلیان[۱۱] [۲] مراجعه کرد.

همچنین، دو مشکل اساسی در ارتباط با توزیعهای پایدار وجود دارد:

الف– فرم بسته (تحلیلی) و مشخصی برای توابع چگالی آنها (به جزء سه توزیع نرمال[۱۲]، کوشی[۱۳] و لوی[۱۴]) وجود ندارد؛

ب– گشتاورهای مرتبه ی r–ام این توزیعها برای $r \geq \alpha$ وجود ندارند.

[۱۰] تعریف ۴ در بخش ۲ را ملاحظه کنید.

[۱۱] Astola and Danielian

[۱۲] Normal

[۱۳] Cauchy

[۱۴] Levy

۲ تعاریف متغیرهای تصادفی پایدار

در این بخش می خواهیم تعاریف مختلفی از توزیعهای پایدار ارائه کنیم. به عبارت دیگر، توزیعهای پایدار بر اساس روشهای مختلفی تعریف می شوند که همگی یک نوع توزیع پایدار را ارائه می کنند. تعاریف متعددی برای توزیعهای پایدار بیان شده است که در اینجا به مرور این تعاریف می پردازیم. فلر [۵] توزیعهای پایدار را بصورت زیر معرفی کرد.

تعریف ۱. *[۵]. متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر برای هر ثابت مثبت A و B، بعضی ثابت مثبت C و عدد حقیقی D وجود داشته باشند بطوریکه برای متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 (نمونه های مستقل از X) رابطه زیر برقرار باشد:*

$$AX_1 + BX_2 \overset{d}{=} CX + D, \qquad (۱)$$

که $\overset{d}{=}$ نمایانگر هم توزیعی می باشد.

نکته ۲. متغیر تصادفی X بطور *اکید پایدار*[۱۵] نامیده می شود اگر در رابطه (۱)، $D = 0$ باشد.

نکته ۳. دلیل استفاده کلمه پایدار این است که توزیع تحت عمل جمع پایدار یا بدون تغییر می ماند.

قضیه ۱.۲. *برای هر متغیر تصادفی پایدار X، یک عدد مانند α وجود دارد بطوریکه برای $\alpha \in (0, 2]$ رابطه زیر برقرار است:*

$$C^\alpha = A^\alpha + B^\alpha.$$

اثبات: برای اثبات به کتاب فلر [۵] مراجعه کنید.

[۱۵] Strictly stable

نکته ۴. یك متغیر تصادفی پایدار با شاخص پایداری آلفا، آلفا-پایدار نامیده می شود.

تعریف ۲. *متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر برای هر $n \geq ۲$، یك عدد مثبت C_n و یك عدد حقیقی D_n وجود داشته باشد بطوریکه*

$$X_۱ + X_۲ + ... + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n, \qquad (۲)$$

که در آن $X_۱, ..., X_n$ نمونه های مستقل از X هستند.

نکته ۵. فلر [۵] نشان داد که برای برخی مقادیر $\alpha \in (۰, ۲]$ در رابطه (۲) داریم، $C_n = n^{\frac{۱}{\alpha}}$.

تعریف ۳. *([۱۱]، [۱۳]). متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر و تنها اگر تابع مشخصه آن بصورت زیر باشد:*

$$\phi_X(t) = \begin{cases} \exp\Big\{ -|\gamma t|^\alpha [۱ - i\beta (\tan \frac{\pi\alpha}{۲}) sign(t)] + i\delta t \Big\}, \\ \quad \alpha \neq ۱, \\ \exp\Big\{ -|\gamma t| \; [۱ + i\beta \frac{۲}{\pi} sign(t) \ln|t|] + i\delta t) \Big\}, \\ \quad \alpha = ۱. \end{cases}$$

که

$$sign(t) = \begin{cases} ۱ & t > ۰, \\ ۰ & t = ۰, \\ -۱ & t < ۰. \end{cases}$$

از تعریف ۳ می بینیم که توزیعهای پایدار دارای چهار پارامتر می باشند که در بخش مقدمه به آن اشاره شد. اگر $\gamma = ۱$ و $\delta = ۰$ آنگاه آنرا توزیع پایدار *استاندارد* می نامیم.

نکته ۶. برای $\delta = ۰, \gamma = ۱, \beta = ۰$، تابع مشخصه بصورت زیر می باشد [۴]:

$$\phi_X(t) = \exp(-|t|^\alpha), \quad \alpha \in (۰, ۲].$$

تعریف ۴. *متغیر تصادفی X دارای توزیع پایدار است اگر برای متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $X_۱, ..., X_n$، دنباله ای از اعداد حقیقی a_n و اعداد مثبت b_n وجود داشته باشند بطوریکه داشته باشیم:*

$$\frac{X_۱ + X_۲ + ... + X_n}{b_n} - a_n \stackrel{d}{=} X.$$

تعریف ۴ بیان می کند که توزیعهای پایدار، تنها توزیعهایی هستند که می توانند بصورت حد مجموع های استاندارد شده ی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند.

نکته ۷. تعاریف ۱ تا ۴ برای متغیرهای تصادفی پایدار هم ارز (معادل) می باشند [۱۳].

۳ توابع چگالی توزیعهای پایدار

در این مقاله، تابع چگالی پایدار را با نماد $s(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ نشان داده و $s(x; \alpha, \beta)$ را تابع چگالی پایدار استاندارد می نامیم. فرمهای توابع چگالی پایدار (به جزء سه حالت نرمال، کوشی و لوی) به صورت تحلیلی وجود ندارند. در این بخش ابتدا به ترتیب فرمهای توابع چگالی نرمال، کوشی و لوی را بیان و سپس توابع چگالی توزیعهای پایدار را در حالت کلی بیان می کنیم.

۱- تابع چگالی نرمال:

اگر در توزیع پایدار $\alpha = ۲$ و $\beta = ۰$ باشد، آنگاه توزیع حاصل را توزیع نرمال با میانگین δ و واریانس $۲\gamma^۲$ می نامیم که فرم تابع چگالی آن بصورت زیر است:

$$s(x; ۲, ۰, \gamma, \delta) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\gamma} \exp(-\frac{(x-\delta)^۲}{۴\gamma^۲}),$$

که $\gamma > ۰$ و $\delta \in R$ هستند.

۲- تابع چگالی کوشی:
اگر در توزیع پایدار $\alpha = 1$ و $\beta = 0$ باشد، آنگاه توزیع حاصل را توزیع کوشی با پارامترهای مکان δ و مقیاس γ می نامیم که فرم تابع چگالی آن بصورت زیر است [۱۳]:

$$s(x;1,0,\gamma,\delta) = \frac{\gamma}{2(\frac{\pi^2}{4}\gamma^2 + (x-\delta)^2)},$$

که $\gamma > 0$ و $\delta \in R$ هستند.

۳- تابع چگالی لوی:
اگر در توزیع پایدار $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = 1$ باشد، آنگاه توزیع حاصل را توزیع لوی با پارامترهای مکان δ و مقیاس γ می نامیم که فرم تابع چگالی آن بصورت زیر است [۱۱]:

$$s(x;\frac{1}{2},1,\gamma,\delta) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\cdot\frac{1}{(x-\delta)^{\frac{3}{2}}}\cdot\exp(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}),$$

که $x > \delta$، $\gamma \in R$ و $\delta > 0$ هستند.

۱.۳ چگالیهای توزیعهای پایدار (حالت کلی)

توابع چگالی توزیع های پایدار به دو فرم انتگرالی و سری بیان می شوند. لازم به ذکر است فرم های انتگرالی به کمک تابع مشخصه توزیع های پایدار و بر اساس روش فرمول معکوس [16] ([۱۳]، ص. ۶۵) بدست می آید.

فرم انتگرالی بصورت زیر می باشد [۱۳] :

برای $\alpha \neq 1$، $\beta = 0$ و $x \neq 0$ داریم:

$$s(x;\alpha,0) = \frac{\alpha}{\pi|\alpha-1|\,x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\Theta;\alpha,x) \times \exp(-g(\Theta;\alpha,x))d\Theta,$$

که در آن،

$$g(\Theta;\alpha,x) = \Big(\frac{x\cos\Theta}{\sin\alpha\Theta}\Big)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\cdot\frac{\cos(\alpha-1)\Theta}{\cos\Theta}.$$

فرمهای سری بصورت زیر می باشند ([۳]، [۲]):

برای $0 < \alpha < 1$، $\beta \neq -1$ و $x > 0$ داریم:

$$s(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(j\alpha+1)}{j!}(-1)^{j-1}x^{-j\alpha-1} \times \sin(\frac{\pi j\alpha(1+\beta)}{2}). \qquad (3)$$

برای $1 < \alpha < 2$، $\beta \neq \pm 1$ و $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$s(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\frac{j}{\alpha}+1)}{j!}(-1)^{j-1}x^{j-1} \times \sin(\frac{\pi j(1+\beta)}{2}). \qquad (4)$$

تذکر ۱. برای جزئیات بیشتر در ارتباط با نحوه بدست آوردن فرمهای سری برای توابع چگالی توزیعهای پایدار به [۱۳] صفحه ۸۷ مراجعه نمائید.

سری (۴) وقتی $x \longrightarrow \infty$ رفتار جالبی ندارد. برای حل این مشکل *بسط مجانبی* مجدداً به کمک روش فرمول معکوس برای تابع چگالی آن ارائه شده است که بصورت زیر می باشد ([۱۳]، ص. ۹۴):

[16] Inversion formula

$$\widehat{s}(x;\alpha,\beta) \approx \frac{\alpha}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Gamma(j\alpha)}{\Gamma(j)}x^{-j\alpha-1} \times \sin\left(\frac{\pi j(2-\alpha)(1+\beta)}{2}\right). \quad (5)$$

نکته ۸. می توان نشان داد که روابط (۳) و (۵) معادلند. بنابراین رابطه (۳) می تواند (بصورت بسط مجانبی) برای تابع چگالی در حالت $1 < \alpha < 2$ نیز در نظر گرفته شود.

نکته ۹. حالت $(\beta \neq 0, \alpha = 1)$ بدلیل مشکلات اساسی که دارد معمولاً بصورت جداگانه بررسی می شود. برای جزئیات بیشتر به زولاتاریف [۱۳] مراجعه کنید.

نکته ۱۰. اگر $x = 0$، آنگاه برای $\alpha \neq 1$ داریم:

$$s(0;\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\beta\frac{K(\alpha)}{\alpha}),$$

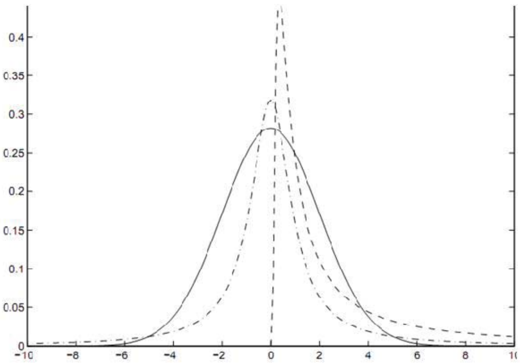
که $K(\alpha) = \alpha - 1 + sign(1-\alpha)$.

نکته ۱۱. مشتقات توابع چگالی پایدار نیز می توانند بصورت فرمهای سری بیان شوند. بعبارتی دیگر با مشتقگیری از فرمهای (۳) و (۴)، فرمهای سری برای مشتقات توابع چگالی پایدار بدست می آیند. خوانندگان محترم برای جزئیات بیشتر به [۱۳] مراجعه نمایند.

۴ شکل های توابع چگالی پایدار

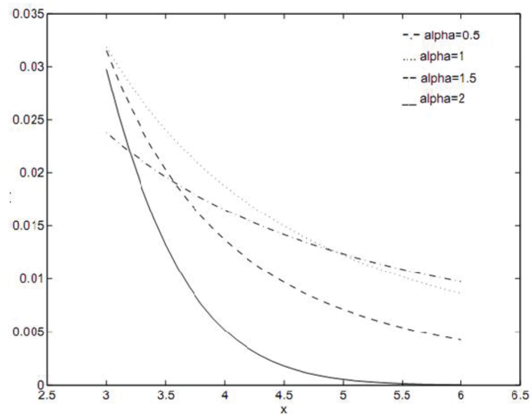
در این بخش، شکلی از سه تابع چگالی نرمال، کوشی، لوی و همچنین نمایشی از توابع چگالی توزیعهای پایدار با شاخص های مولفه و پارامتر چولگی مختلف ارائه می کنیم.

با توجه به شکل ۱ می بینیم که دم توزیع لوی از دم توزیع



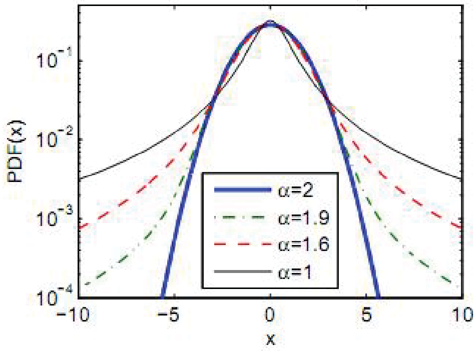
شکل ۱: توابع چگالی توزیعهای نرمال (—)، کوشی (-.-) و لوی(- -)

کوشی، و دم توزیع کوشی از دم توزیع نرمال سنگین تر است (یعنی با سرعت کمتری به سمت صفر میل می کند).



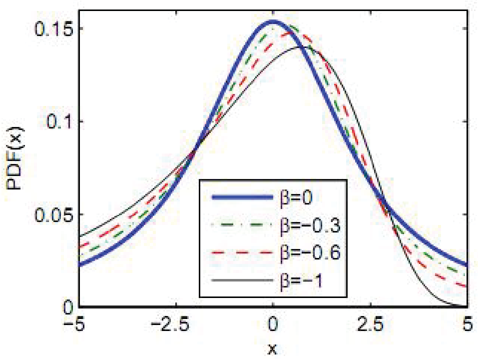
شکل ۲: نمایشی از دمهای توزیعهای پایدار برای $\alpha = 0/5, 1, 1/5, 2$,

همچنین، با توجه به شکل ۲ می بینیم که هر چقدر آلفاها کوچکتر باشند دم های توزیع سنگین تر هستند. برای مثال، دم توزیع برای $\alpha = 0/5$ بسیار سنگین تر از دم توزیع برای $\alpha = 1/5$ است. بطور دقیق تر، شکل ۳ نمودارهای توابع چگالی پایدار برای آلفاهای مختلف وقتی $\beta = 0$ است را نشان می دهد.



شکل ۳: نمایشی از توابع چگالی توزیع های پایدار برای $\alpha = ۱, ۱/۶, ۱/۹, ۲$ و $\beta = ۰$

شکل ۴، نمودار توابع چگالی پایدار برای $\alpha = ۱/۱$ و مقادیر مختلف بتا (پارامتر چولگی) است. از شکل ۴ وابستگی توابع چگالی پایدار به مقادیر مختلف بتا نشان داده می شود ([۹]).



شکل ۴: نمایشی از توابع چگالی توزیعهای پایدار برای $\alpha = ۱/۱$ و $\beta = ۰, -۰/۳, -۰/۶, -۱$

۵ خواص توزیع های پایدار

در این بخش به بعضی از خواص مهم توزیع های پایدار اشاره خواهیم کرد.

خاصیت ۱. فرض کنید X دارای توزیع پایدار باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} E|X|^r < \infty & if \quad ۰ < r < \alpha, \\ E|X|^r = \infty & if \quad r \geq \alpha. \end{cases}$$

خاصیت ۲. احتمالات دم های توزیعهای پایدار و توزیع پارتو[۱۷] بطور مجانبی یکسان هستند. یعنی اگر $x \longrightarrow \infty$ و $\alpha \neq ۲$ آنگاه

$$\mathbb{P}_\alpha(X > x) \propto \gamma^\alpha \cdot (۱ + \beta) C_\alpha \cdot x^{-\alpha}, \qquad (۶)$$

که $C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \sin(\frac{\pi\alpha}{۲})$.

از هم ارزی (۶) نتیجه می گیریم وقتی $x \longrightarrow \infty$ آنگاه

$$s(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) \propto \gamma^\alpha \cdot \alpha(۱ + \beta) C_\alpha \cdot x^{-(۱+\alpha)}.$$

از این رو برای مشتقات مراتب بالاتر $s(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ داریم:

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) \quad &\propto \quad (-۱)^k (۱ + \beta) C_\alpha \\ &\times \quad \gamma^\alpha \cdot \alpha_{(k+۱)} \cdot x^{-(k+۱+\alpha)}, \quad k \geq ۱, \end{aligned}$$

که $\alpha_{(k+۱)} = \alpha \cdot (\alpha + ۱) ... (\alpha + k)$.

تذکر ۲. $h(x) \propto l(x)$ یعنی اینکه $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{h(x)}{l(x)} = ۱$.

خاصیت ۳. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim S(x; \alpha, \beta_i, \gamma_i, \delta_i)$، $i = ۱, ۲$ باشند. آنگاه $X_۱ + X_۲ \sim S(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ بطوریکه

[۱۷] Pareto

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\ \beta = \frac{\beta_1\gamma_1^\alpha + \beta_2\gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha},\ \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

خاصیت ۴. فرض کنید $X \sim S(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ و a یك عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$X + a \sim S(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta + a).$$

خاصیت ۵. برای هر $\alpha \in (0,2)$ ، $X \sim S(x;\alpha,\beta,\gamma,0)$ اگر و فقط اگر

$$-X \sim S(x;\alpha,-\beta,\gamma,0).$$

خاصیت ۶. در توزیع پایدار اگر $\beta = 0$ باشد، آنگاه توزیع حاصل را توزیع پایدار *متقارن* [18] می نامند.

خاصیت ۷. در توزیع پایدار اگر $\beta = +1$ ($\beta = -1$) باشد، آنگاه توزیع حاصل را توزیع پایدار بطور ماکزیمم چوله مثبت (منفی) گویند. همچنین اگر $\beta > 0$ ($\beta < 0$) آنگاه توزیع حاصل را توزیع پایدار چوله مثبت (منفی) می نامند.

تذکر ۳. برای اثبات خاصیت های ۱ تا ۵ و همچنین بررسی خواص بیشتر در ارتباط با توزیع های پایدار، خوانندگان محترم می توانند به مراجع [۱۲] و [۱۳] مراجعه نمایند.

۶ یك مثال واقعی

در این بخش یك مثال واقعی از کاربرد توزیعهای پایدار ارائه می کنیم. لازم به ذکر است داده های این مثال مربوط به قبل از سال ۲۰۰۲ میلادی می باشد [19].

[18] Symmetric

[19] در سال ۲۰۰۲ یورو بعنوان واحد پول مشترك بسیاری از کشورهای اروپایی معرفی شد.

مثال ۱. داده های نرخ ارز [20] روزانه برای واحدهای پول ۱۵ کشور مختلف در یك دوره ی ۱۶ ساله (از دوم ماه ژانویه ۱۹۸۰ الی بیست و یکم ماه می ۱۹۹۶) در نظر گرفته شده اند ([۱۰]). داده ها بوسیله توزیعهای پایدار برازش داده می شوند که نتایج در شکل ۵ نشان داده شده است. از شکل ۵ توجه می کنیم که واحد پول با سنگین ترین دمها ($\widehat{\alpha} = 1/441$) مربوط به واحد پول ایتالیا[21] می باشد در حالی که نازکترین دمها ($\widehat{\alpha} = 1/530$) مربوط به واحد پول سوئیس[22] است. بطور مشابه می توان برای واحدهای پول کشورهای دیگر تفسیر مربوطه را انجام داد. برای جزئیات بیشتر به [۱۰] مراجعه نمائید. ($\widehat{\alpha}$ برآورد درستنمایی ماکسیمم برای α است).

country	α	β	γ	δ
Australia	1.479 ± 0.047	0.033 ± 0.080	0.00413 ± 0.00013	-0.00015 ± 0.00022
Austria	1.559 ± 0.047	-0.119 ± 0.092	0.00285 ± 0.00009	0.00014 ± 0.00015
Belgium	1.473 ± 0.047	-0.061 ± 0.080	0.00306 ± 0.00010	0.00009 ± 0.00016
Canada	1.574 ± 0.047	-0.051 ± 0.093	0.00379 ± 0.00012	0.00004 ± 0.00020
Denmark	1.545 ± 0.047	-0.119 ± 0.090	0.00272 ± 0.00008	0.00022 ± 0.00014
France	1.438 ± 0.047	-0.146 ± 0.078	0.00245 ± 0.00008	0.00028 ± 0.00013
Germany	1.495 ± 0.047	-0.182 ± 0.085	0.00244 ± 0.00008	0.00019 ± 0.00013
Italy	1.441 ± 0.046	-0.043 ± 0.076	0.00266 ± 0.00009	0.00017 ± 0.00014
Japan	1.511 ± 0.047	-0.148 ± 0.086	0.00368 ± 0.00012	0.00013 ± 0.00019
Netherlands	1.467 ± 0.047	-0.167 ± 0.081	0.00244 ± 0.00008	0.00016 ± 0.00013
Norway	1.533 ± 0.047	-0.070 ± 0.088	0.00253 ± 0.00008	0.00005 ± 0.00013
Spain	1.512 ± 0.047	-0.007 ± 0.083	0.00268 ± 0.00008	0.00012 ± 0.00014
Sweden	1.517 ± 0.047	-0.081 ± 0.085	0.00256 ± 0.00008	0.00006 ± 0.00013
Switzerland	1.599 ± 0.047	-0.179 ± 0.100	0.00295 ± 0.00009	0.00014 ± 0.00016
United States	1.530 ± 0.047	-0.088 ± 0.088	0.00376 ± 0.00012	0.00009 ± 0.00020

شکل ۵: تحلیل نرخ ارز، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم پارامترها و بازه های اطمینان ۹۵ درصدی برای پارامترهای توزیعهای پایدار با اندازه نمونه $n = 4274$.

تذکر ۴. شکل ۶ چگالی برازش توزیع های پایدار و توزیع نرمال با مجموعه داده های واحد پول آلمان[23] را نشان می دهد. می بینیم که این مجموعه داده ها نرمال نیستند. در

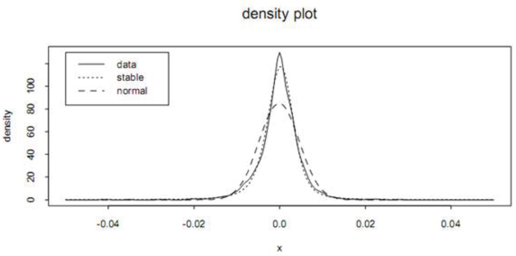
[20] Exchange rate data

[21] Italy

[22] Switzerland

[23] Germany

واقع دم های سنگین باعث می شوند که واریانس نمونه بسیار بزرگ باشد و لذا توزیع نرمال برازش مناسبی برای اینگونه داده ها نیست.



شکل ۶: برازش تابع چگالی توزیع های پایدار و نرمال با داده ها

تذکر ۵. برای مثالهای بیشتر (مثلاً نویزهای رادار، قیمت سهام در بازار بورس و ...) در ارتباط با کاربرد توزیع های پایدار به [۱۰] مراجعه نمائید.

۷ بسته ی نرم افزار R

در این بخش، اشاره ای کوتاه به بسته های نرم افزار R برای توزیع های پایدار خواهیم داشت. چند تابع مهم که در نرم افزار R تعریف شده اند عبارتند از ([۱۵]):

$$dstable(x, alpha, beta, gamma = ۱, delta = ۰, param).$$

عبارت فوق تابع چگالی پایدار را محاسبه می کند. متغیر *param* نوع پارامتری سازی توزیع پایدار را مشخص می کند. برای جزئیات بیشتر در این ارتباط به [۱۵] مراجعه کنید.

$$pstable(x, alpha, beta, gamma = ۱, delta = ۰, param).$$

عبارت فوق تابع توزیع تجمعی پایدار را محاسبه می کند.

$$qstable(x, alpha, beta, gamma = ۱, delta = ۰, param).$$

عبارت بالا نیز چندک های توزیع تجمعی پایدار را محاسبه می کند. همچنین عبارت زیر نیز برای شبیه سازی n متغیر تصادفی پایدار می باشد.

$$rstable(n, alpha, beta, gamma = ۱, delta = ۰, param).$$

جهت محاسبه مشتق توابع چگالی توزیع های پایدار از تابع زیر استفاده می شود:

$$dstable.deriv(x, alpha, beta, gamma, delta, param).$$

و برای محاسبه مشتق دوم توابع چگالی توزیع های پایدار می توان از تابع زیر استفاده نمود:

$$dstable.secondderiv(x, alpha, beta, gamma, delta, param).$$

خوانندگان محترم برای مطالعه ی بسته های بیشتر و کاملتر نرم افزار R در توزیعهای پایدار می توانند به [۱۵] و [۱۶] مراجعه نمایند.

تقدیر و تشکر

نویسنده از پیشنهادات ارزنده هیات تحریریه محترم نشریه ندا و داوران گرامی که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شد کمال قدردانی و تشکر را دارد.

مراجع

[۱] امینی، ط. (۱۳۹۲). ام - برآوردگرهای حاصل از روش تعمیم یافته گشتاوری برای توزیع لوی. پایان

نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی، دانشگاه پیام نور مرکز مشهد، ۹۸ صفحه.

[2] Astola, J. and Danielian, E., (2007). Frequency distributions in biomolecular systems and growing networks. Tampere International Center for Signal Processing (TICSP), Series no. 31, 251 pages.

[3] Farbod, D., (2011). M-estimators as GMM for stable laws discretizations. Journal of Statistical Research of Iran, SRTC, 8, 1, 85-96.

[4] Farbod, D. and Gasparian, K. V., (2012). On the confidence intervals of parametric functions for distributions generated by symmetric stable laws. Statistica, Bologna, 72, 4, 405-413.

[5] Feller, W., (1971). Introduction to Probability Theory and its Applications. Wiley and Sons.

[6] Firouzi, M. and Mohammadpour, A., (2009). A survey on simulating stable random variables. Journal of Statistical Research of Iran, SRTC, 6, 1, 25-36, (in Persian).

[7] Khinchin, A. Ya., (1938). Limit laws for sums of independent random variables. ONTI, Moscow, (in Russian).

[8] Levy, P., (1925). Calcul des Probabilites. Gauthier-Villars, Paris.

[9] Misiorek, A. and Weron, R., (2010). Heavy-tailed distributions in VaR calculations. Research Report, Hugo Steinhaus Center (HSC), Wroclaw University of Technology, Wrocław, Poland.

[10] Nolan, J. P., (1999). Fitting data and assessing goodness-of-fit with Stable distributions. Online available at: http://academic2.american.edu /jp-nolan /stable /DataAnalysis.pdf

[11] Nolan, J. P., (2009). Stable Distributions - Models for Heavy-tailed Data. Online available at: http://academic2.american.edu /jp-nolan /stable /chap1.pdf, In progress.

[12] Popa, S., (2005). Stable Distributions and Numerical Generation of Stable Random Variables. M.Sc. Thesis, Department of Mathematics, University of Wyoming.

[13] Zolotarev, V. M., (1986). One-Dimensional Stable Distributions. American Mathematical Society, (translation from the original 1983

Russian edition; *Odnomernye Ustoichivye Raspredeleniya*).

[14] User manual online available at: http://www.robustanalysis.com /Mathematica /UserManual.pdf

[15] User manual online available at: http://www.robustanalysis.com /RUserManual.pdf

[16] User manual online available at: http://cran.r-project.org /web /packages/ stabledist /index.html

[17] User manual online available at: http://math.bu.edu /people /mveillet /html /alphastablepub.html

[18] Web site: http://adelm.ir/?page_id=152

ضمیمه

دانشجویان محترم سال آخر کارشناسی آمار و ریاضی و دانشجویان کارشناسی ارشد و دکتری که علاقه مند به پژوهش و تحقیق در زمینه توزیعهای پایدار و کاربردهای آن هستند می توانند به کتاب *ولادیمیر م. زولاتاریف* [۱۳] مراجعه کنند. این کتاب یکی از مراجع اصلی در زمینه توزیعهای پایدار می باشد که در سال ۱۹۸۳ به زبان روسی چاپ و در سال ۱۹۸۶ توسط انجمن ریاضی آمریکا به زبان انگلیسی ترجمه شده است. جهت مطالعه این کتاب علاوه بر تسلط بر مفاهیم آمار و بخصوص نظریه احتمال، تسلط بر دروس ریاضیات پایه و همچنین آشنایی اولیه با دروسی نظیر آنالیز حقیقی و توابع مختلط نیز ضروری می باشد. *ولادیمیر زولاتاریف* دکترای خود را در زمینه نظریه احتمال از دانشگاه دولتی مسکو [۲۴] و تحت راهنمایی احتمال دان مشهور روسی *آندری ن. کلموگروف* [۲۵] دریافت نمود. وی همچنین برنده جایزه مارکف [۲۶] در سال ۱۹۷۱ می باشد.

ولادیمیر زولاتاریف

از دیگر کتابهایی که دانشجویان می توانند در ارتباط با توزیعهای پایدار مطالعه نمایند کتاب *جاهن پ. نولان* [۱۱] می باشد که البته تاکنون فقط فصل اول این کتاب آماده شده و در اینترنت قابل دانلود می باشد. این کتاب در حال تکمیل شدن است که در صورت اتمام، کتاب بسیار مفیدی خواهد بود.

محققینی که در زمینه آمار استنباطی فعالیت می کنند می توانند در ارتباط با برآورد پارامترهای این توزیع ها تحقیقات گسترده ای را انجام دهند. با توجه به

[۲۴] Moscow State University

[۲۵] A. N. Kolmogorov

[۲۶] Markov Prize

عدم وجود فرمهای تحلیلی برای توابع چگالی و توابع توزیع تجمعی توزیعهای پایدار، آشنایی با دروسی نظیر محاسبات عددی (به ویژه روشهای تکرار عددی)، تحقیق در عملیات (برنامه ریزی خطی و غیر خطی) و همچنین تسلط نسبی بر نرم افزارهای آماری و ریاضی (مانند R ، Mathematica ، Matlab و ...) امری اجتناب ناپذیر است.

خوانندگان محترم جهت مطالعه توزیعهای پایدار در نرم افزار Mathematica به [۱۴] و توزیعهای پایدار در نرم افزار Matlab به [۱۷] مراجعه نمایند. همچنین، لیستی از بعضی مقالات چاپ شده و پروژه های تحقیقاتی در ارتباط با توزیعهای پایدار و شبیه سازی آنها به کمك نرم افزار R در سایت دکتر عادل محمدپور [۱۸] قابل مشاهده می باشد.