مطالعه وابستگی دمی با استفاده از تابع مفصل

سید شاهرخ هاشمی بصرا، ابراهیم صالحی
گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند

چکیده

در اکثر مطالعات توجه محققین به بررسی مدل‌های آماری با فرض استقلال داده‌ها معطوف بوده است. اما در جهان واقع ممکن است داده‌ها مستقل از هم نباشند. بنابراین رده بزرگی از مدل‌بندی داده‌ها در این طبقه قرار نمی‌گیرند. چنین مدل‌هایی را باید با فرض وابستگی بین داده‌ها مورد مطالعه قرار داد. برای دستیابی به چنین هدفی مفاهیم وابستگی معرفی گردیده است که عمدتاً بر پایه‌ی توابع مفصل بیان می‌شوند. علاوه بر این به کمک تابع مفصل می‌توان وابستگی را در هر دو طرف توزیع با استفاده از وابستگی دمی تعیین کرد. در این مقاله به طور مختصر به بررسی وابستگی دمی تابع مفصل‌های ارشمیدسی و مقدار فرین می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: مفصل ارشمیدسی، مقدار فرین، ضریب وابستگی دمی بالا، ضریب وابستگی دمی پایین.

۱ مقدمه

مطالعه مفصل‌ها و کاربرد آنها در آمار یک پدیده نوین محسوب می‌شود. اخیراً در بسیاری از مقالات توجه نویسندگان به کاربرد توابع مفصل در زمینه‌های مختلف بویژه در نظریه قابلیت اعتماد و فرایندهای تصادفی جلب شده و تحقیقات در این زمینه رو به افزون است. کلمه مفصل برای اولین بار توسط اسکلار[۱] [۲۳] مطرح شده و در ادامه بطور رسمی با کاربرد امروزی توسط فیشر[۲] [۷] انتشار یافت. انتشار کتب و مقالات فراوان در سال‌های اخیر به موضوع تابع مفصل نشان‌دهنده توجه و علاقه رو به رشد محققان به این تابع و استفاده‌های کاربردی آن در آمار و احتمال است، که از جمله می‌توان به کتاب جامع نلسن[۳] [۱۸] در این زمینه اشاره کرد. توابع مفصل به دو دلیل مورد علاقه محققان و نویسندگان قرارگرفته‌اند. دلیل اول این است که بعنوان روشی برای مطالعه اندازه وابستگی

[۱] Sklar

[۲] Fisher

[۳] Nelsen

بین متغیرها به صورت ناپارامتری به کار برده می‌شود و دلیل دوم اینکه ابزاري براي ساخت تابع توزیع‌های چند متغیره بر اساس توابع توزیع حاشیه‌ای محسوب می‌شوند. مهمترین تحقیقات انجام شده در این زمینه بیشتر در ارتباط با مفاهیم وابستگی و ترتیب‌های تصادفی بوده است. شرح جامعی از توابع مفصل و ویژگی‌های آنها در جو [۱۲] و نلسن [۱۸] ارائه شده است. به دلیل ویژگی‌های قابل توجه، توابع مفصل در مسائل قابلیت اعتماد براي مدل‌سازی ساختار وابستگی بین واحدهای سیستم به طور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرند. امروزه مطالعه وابستگی میان اجزای سیستم‌های منسجم با کمک تابع مفصل مورد توجه بسیاری از محققان و طراحان سیستم قرارگرفته است که از جمله می‌توان به جیا و همکاران [۱۱]، ناوارو و اسپیزیچیانو [۱۷] و رضاپور و همکاران [۲۱] اشاره کرد.

تعیین میزان وابستگی بین متغیرهای تصادفی یکی از مهمترین موضوعاتی است که به طور گسترده در آمار و احتمال مورد توجه نویسندگان و محققان قرارگرفته است. روش‌های مختلفی برای اندازه‌گیری این میزان وجود دارد که از جمله می‌توان به ضرایب وابستگی دمی[۴] (TDC) اشاره کرد. اندازه‌های وابستگی دمی برای سنجش میزان وابستگی در دم توزیع به کار می‌روند. با استفاده از این اندازه‌ها می‌توان میزان وابستگی بین پیشامدهای فرین و پیشامدهای نادر را سنجید. یکی از مزیت‌های این اندازه‌ها این است که برای محاسبه آنها نیاز به در دست داشتن توزیع جامعه نیست. اندازه‌های دمی بالا و پایین به ترتیب میزان وابستگی بین متغیرها را در گوشه‌ی یک چهارم بالای سمت راست مربع I^2 و گوشه‌ی یک چهارم پایین سمت چپ آن، اندازه می‌گیرند. این اندازه‌ها درسال ۱۹۶۰ توسط سبوئیا[۵] [۲۲] معرفی شده و نتایج بروز و جدید برای آنها را می‌توان در فریرا [۶]، جو [۱۲] و نلسن [۱۸] مشاهده کرد.

در طول دهه‌های گذشته، به سبب تاثیرات جهانی و مقررات اعمال‌شده بر بازارها، همبستگی میان بازدهی دارایی‌های مالی افزایش یافته است. با این حال، معیارهای همبستگی رایج همچون ضریب همبستگی پیرسون در همه‌ی شرایط برای درک صحیح همبستگی‌های موجود در بازارهای مالی مناسب نیست. از طرفی همبستگی میان رویدادهای فرین همچون بازدهی بیش‌از حد منفی سهام سبب احساس نیاز به معیارهای همبستگی جایگزین شده است، تا راهبردهای مناسب تخصیص دارایی را حمایت نمایند. در چندین مطالعه تجربی، همچون مطالعات آنی و خاروبی [۱] و مالورگن و سورنت [۱۳] نشان داده شده است که استفاده از مفهوم وابستگی دمی، ابزاری سودمند برای تشریح وابستگی میان داده‌های فرین مالی است. علاوه بر این، تحقیقات آنها بطور ویژه نشان داد که هنگام نوسان و یا رکود بازار به ویژه هنگام سرایت شوک‌های مثبت و منفی در بازارهای بین المللی سهام، وابستگی دمی نقش مهمی را ایفا می‌کند. از مطالعات انجام شده‌ی دیگر در زمینه کاربرد اندازه‌های وابستگی دمی می‌توان به امبرچتس و همکاران [۵]، کلایول و گاگن [۲] و سان و همکاران [۲۴] اشاره کرد.

این مقاله در چهار بخش تنظیم شده است. در بخش ۲ پس از مقدمه به معرفی تابع مفصل و ارائه قضیه مهم اسکلار خواهیم پرداخت. در ادامه این بخش توابع مفصل ارشمیدسی[۶] و مقدار فرین[۷] و ویژگی‌های آنها با

[۴] Tail Dependence Coefficient

[۵] Sibuya

[۶] Archimedean Copula

[۷] Extreme Value

ذکر چند مثال ارائه شده است. فرم ضرایب وابستگی دمی مفصل‌های ارشمیدسی و مقدار فرین را در بخش ۳ ارائه کرده و در پایان نتایج مقاله را به طور خلاصه در بخش ۴ گزارش می‌کنیم.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

توابع مفصل ابزارهای مفید و آسانی برای مدل‌بندی کردن ساختارهای وابسته‌ی بین واحدها در سیستم‌های گوناگون هستند. تابع مفصل یک تابع توزیع چند متغیره با توابع توزیع حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد است. در ادامه تعریف این تابع را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. *تابع $C(.,.)$ را تابع مفصل گویند هرگاه*

۱-برای هر $u, v \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0,$$

$$C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v.$$

۲-برای هر $0 \le u_1 \le u_2 \le 1$ و $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$،

$$C(u_1, v_1) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_2, v_2) \ge 0.$$

ویژگی ۲ در تعریف فوق خاصیت صعودی بودن تابع مفصل $C(.,.)$ است (براي جزئیات بیشتر نلسن [۱۸] را ببینید).

قضیه ۱.۲. *(اسکلار [۲۳]) اگر H یک تابع توزیع توام با توابع حاشیه‌ای F و G باشد آنگاه مفصلی مانند $C(.,.)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in R$،*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1)$$

اگر F و G پیوسته باشند آنگاه $C(.,.)$ یکتاست و در غیر این صورت می‌توان مفصلی مانند $C(.,.)$ به طور یکتا روی دامنه F و دامنه G مشخص کرد. برعکس اگر $C(.,.)$ یک تابع مفصل، F و G توابع توزیع باشند، در این صورت تابع H تعریف شده در رابطه (۱) یک تابع توزیع توام با توزیع‌های حاشیه‌ای F و G است.

مثال ۱.۲. *(تابع توزیع پارتو[۸] دو متغیره، فریز و والدز [۸]) فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی وابسته با توابع توزیع حاشیه‌ای یکسان به فرم زیر باشند:*

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \quad \alpha, \lambda > 0,$$

آنگاه تابع توزیع توام پارتو برابر است با:

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) \\
&= 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} \\
&+ \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} \\
&= F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 \\
&+ \left[(1 - F_1(x_1))^{\frac{-1}{\alpha}} + (1 - F_2(x_2))^{\frac{-1}{\alpha}}\right]^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $u = F_1(x_1)$ و $v = F_2(x_2)$، با جایگذاری در معادله فوق داریم:

$$C(u, v) = u + v - 1 + \left[(1 - u)^{\frac{-1}{\alpha}} + (1 - v)^{\frac{-1}{\alpha}}\right]^{-\alpha},$$

که به تابع مفصل پارتو معروف است.

توابع مفصل بر اساس نوع ساختارشان به رده‌های مختلفی تقسیم می‌شوند. از مهمترین آنها می‌توان به رده خانواده مفصل‌های ارشمیدسی و مقدار فرین اشاره کرد. بسیاری از تابع مفصل‌های معروف و پرکاربرد در زمینه قابلیت اعتماد (فارلی-گامبل-مورگنسترن[۹]، علی-

[۸] Pareto

[۹] Farli-Gumbel-Morgenestern

میکائیل-حق [۱۰]، کلیتون[۱۱] و ...) متعلق به این رده‌ها می‌باشند. به دلیل استفاده از این نوع توابع مفصل در بخش ۳ به معرفی این رده‌ها در ادامه می‌پردازیم.

یکی از مفصل‌هایی که در این قسمت مورد مطالعه قرار می‌دهیم مفصل ارشمیدسی نام دارد. به دلیل اهمیت این رده و کاربرد فراوان آن در زمینه‌های مختلف، بسیاری از خواص آن در متون آماری مورد بررسی قرارگرفته است که ازجمله می‌توان به جنست و ریوست [۹]، مارشال و الکین [۱۴]، مولر و اسکارسینی [۱۵] و نلسن [۱۸] اشاره کرد. بعلاوه، جین و جین-لاک [۱۰] به مطالعه وابستگی برای تابع مفصل ارشمیدسی و ویژگی سالخوردگی تابع مولد آنها پرداختند. مفصل‌های ارشمیدسی به دلایل متعددی مورد توجه می‌باشند که در زیر به دو دلیل عمده بسنده می‌کنیم:

۱- سادگی ساخت این رده و اعضای آن؛

۲- متعلق بودن بسیاری از مفصل‌ها معروف از جمله مفصل کلیتون، علی-میکائیل-حق و ... به این رده.

***تعریف* ۲.۲.** *یک تابع مفصل را مفصل ارشمیدسی‌گوییم، و با $C_\phi(.,.)$ نمایش می‌دهیم، اگر بتوان آن را به صورت زیر نوشت:*

$$C_\phi(u_1, u_2, ..., u_n) = \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\phi(u_i)\right),$$

که در آن $\phi : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty]$، به طوری‌که $\phi(1) = 0$ و

$$(-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\phi^{-1}(t) > 0, \qquad i \in N,$$

و ϕ را تابع مولد مفصل $C_\phi(.,.)$ می‌نامند.

مثال‌هایی از توابع مفصل ارشمیدسی معروف در جدول ۱ ارائه شده است.

در ادامه یکی دیگر از رده‌های مهم، یعنی مفصل مقدار فرین را مورد بررسی قرار خواهیم داد. به دلیل شکل ساختاری این رده بسیاری از خواص این مفصل در مقالات آماری ابتدا درحالت دو بعدی مورد بررسی قرار گرفت. پس از آن نتایج بدست آمده به حالت چند بعدی نیز تعمیم یافت که از میان آنها می‌توان به کاپرا و همکاران [۳]، مورلیمان [۱۶]، پیکندز [۱۹] و رسنیک [۲۰] اشاره کرد.

***تعریف* ۳.۲.** *(پیکندز [۱۹]) مفصل $C_A(.,.)$ را مفصل مقدار فرین گوییم هرگاه به ازای هر $(u, v) \in (0, 1]^2 - \{(1, 1)\}$،*

$$C_A(u, v) = \exp\left\{\log(uv) A\left(\frac{\log v}{\log uv}\right)\right\},$$

که در آن $A(t) : [0, 1] \longrightarrow [\frac{1}{2}, 1]$، تابع وابستگی نام دارد که تابعی محدب است و $A(0) = A(1) = 1$، و برای هر $t \in [0, 1]$،

$$\max\{t, 1 - t\} \leq A(t) \leq 1.$$

محاسبه وابستگی دمی، محاسبه حد نهایی بالا و پایین تابع مفصل است. با توجه به تعریف تابع مفصل مقدار فرین، به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که اگر $A(t) = 1$ باشد، آنگاه $C_A(u, v) = uv$ خواهد شد که مفصل استقلال را نتیجه می‌دهد، و اگر $A(t) = \max\{t, 1 - t\}$ مفصل متناظر با آن برابر با:

$$C_A(u, v) = \min\{u, v\},$$

خواهد شد که وابستگی کامل را نشان می‌دهد. مثال‌هایی از توابع مفصل مقدار فرین معروف در جدول ۲ گنجانده شده است.

[۱۰] Ali-Mikhail-Haq

[۱۱] Clayton

جدول ۱: توابع مفصل ارشمیدسی

مدل	تابع مولد $\phi(t)$	تابع مفصل
کلیتون-کوک-جانسون-اوکس	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta}-1),\ \theta\in(0,\infty)$	$(u^{\theta}+v^{\theta}-1)^{\frac{-1}{\theta}}$
گامبل و هوگارد	$[-\log(t)]^{\theta},\ \theta\in[1,\infty)$	$\exp\{-[(-\log u)^{\theta}+(-\log v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}$
فرانک	$\log\left(\frac{e^{\theta t}-1}{e^{\theta}-1}\right)\ \theta\in R-\{0\}$	$\frac{1}{\theta}\log\{1+\frac{(e^{\theta u}-1)(e^{\theta v}-1)}{e^{\theta}-1}\}$

جدول ۲: توابع مفصل مقدار فرین

مدل	$A(t)$	تابع مفصل
گامبل	$\theta t^{2}-\theta t+1,\quad \theta\in(0,1)$	$uv\exp\left(-\theta\frac{\log u\log v}{\log(uv)}\right)$
گالامبوس	$1-\left[t^{-\theta}+(1-t)^{-\theta}\right]^{\frac{-1}{\theta}},\quad \theta\in(0,\infty)$	$uv\exp\{[\mid\log u\mid^{-\theta}+\mid\log v\mid^{-\theta}]^{\frac{-1}{\theta}}\}$
مارشال-الکین	$\max\{1-\theta_1 t,1-\theta_2(1-t)\},\quad \theta_1,\theta_2\in(0,1)^2$	$u^{1-\theta_1}v^{1-\theta_2}\min\{u^{\theta_1},v^{\theta_2}\}$

۳ نتایج اصلی

در این بخش به ارائه مفهوم اندازه‌های وابستگی دمی بالا و پایین و محاسبه آنها برای خانواده مفصل‌های ارشمیدسی و مقدارفرین می‌پردازیم.

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی به ترتیب با توابع توزیع حاشیه‌ای F و G باشند. اگر قرار دهیم $U=F(X)$ و $V=G(Y)$، آنگاه با فرض وجود حدود زیر، ضریب وابستگی دمی بالا که با λ_u نشان می‌دهیم، برابر است با:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{u\longrightarrow 1^-} P[V>u|U>u]\\ &= \lim_{u\longrightarrow 1^-}\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}, \qquad (2)\end{aligned}$$

و ضریب وابستگی دمی پایین که با λ_l نمایش می‌دهیم، برابر است با:

$$\lambda_l=\lim_{u\longrightarrow 0^+}P[V\le u|U\le u]=\lim_{u\longrightarrow 0^+}\frac{C(u,u)}{u}. \qquad (3)$$

ضرایب وابستگی دمی تعریف شده‌ی فوق در فاصله $[0,1]$ قرار می‌گیرند. مقدار صفر به معنای عدم وجود وابستگی در دم توزیع و مقدار ۱ نشان‌دهنده‌ی وابستگی کامل در دم توزیع است. کولز[۱۲] و همکاران [۴] نسخه به طور مجانبی هم ارز با ضرایب وابستگی بالا و پایین که به ترتیب با λ_U و λ_L نمایش می‌دهیم، با فرض وجود حدود به صورت زیر ارائه دادند:

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2-\lim_{u\longrightarrow 1^-}\frac{\log C(u,u)}{\log(u)}, \qquad (4)\\ \lambda_L &= 2-\lim_{u\longrightarrow 0^+}\frac{\log(1-2u+C(u,u))}{\log(1-u)}. \qquad (5)\end{aligned}$$

در زیر نتایجی برای ضرایب وابستگی دمی و نسخه به طور مجانبی آنها برای مفصل‌های ارشمیدسی بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳ . *فرض کنید $C_\phi(u,u)$ تابع مفصل ارشمیدسی با تابع مولد $\phi(u)$ باشد، آنگاه ضرایب وابستگی دمی بالا و پایین این تابع مفصل به ترتیب برابرند با:*

$$\lambda_u=2-2\lim_{u\longrightarrow 1^-}\frac{\phi'(u)}{\phi'(\phi^{-1}(2\phi(u)))},$$

[۱۲]Coles

$$\lambda_l = ۲ \lim_{u \longrightarrow ۰^+} \frac{\phi'(u)}{\phi'(\phi^{-۱}(۲\phi(u)))}.$$

اثبات. با استفاده از تعریف ضریب وابستگی دمی بالا در رابطه (۲) و شکل مفصل ارشمیدسی داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{۱ - ۲u + C_\phi(u,u)}{۱-u} \\ &= \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{۱ - ۲u + \phi^{-۱}(۲\phi(u))}{۱-u}.\end{aligned}$$

از اینکه $\phi(۱) = ۰$ و $\phi^{-۱}(۰) = ۱$، حد فوق هنگامی که $u \longrightarrow ۱^-$، مبهم می‌شود. بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال و با توجه به اینکه $(\phi^{-۱})'(u) = \frac{۱}{\phi'(\phi^{-۱}(u))}$، رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_u = ۲ - ۲ \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{\phi'(u)}{\phi'(\phi^{-۱}(۲\phi(u)))}.$$

به طور مشابه و با استفاده از قاعده هوپیتال برای ضریب وابستگی دمی پایین داریم:

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{u \longrightarrow ۰^+} \frac{\phi^{-۱}(۲\phi(u))}{u} \\ &= ۲ \lim_{u \longrightarrow ۰^+} \frac{\phi'(u)}{\phi'(\phi^{-۱}(۲\phi(u)))}.\end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۳. *فرض کنید $C_\phi(u,u)$ تابع مفصل ارشمیدسی با تابع مولد $\phi(u)$ باشد، آنگاه:*

$$\lambda_U = ۲ - ۲ \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{u\phi'(u)}{\phi^{-۱}(۲\phi(u))\phi'(\phi^{-۱}(۲\phi(u)))}.$$

اثبات. با توجه به رابطه (۴) و تابع مولد $\phi(u)$ داریم:

$$\lambda_U = ۲ - \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{\log C_\phi(u,u)}{\log(u)}.$$

از اینکه $\phi(۱) = ۰$ و $\phi^{-۱}(۰) = ۱$، حد فوق هنگامی که $u \longrightarrow ۱^-$، مبهم می‌شود. بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال و با توجه به اینکه $(\phi^{-۱})'(u) = \frac{۱}{\phi'(\phi^{-۱}(u))}$، رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\lambda_U &= ۲ - \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{uC'_\phi(u,u)}{C_\phi(u,u)} \\ &= ۲ - \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{\frac{۲u\phi'(u)}{\phi'(\phi^{-۱}(۲\phi(u)))}}{\phi^{-۱}(۲\phi(u))}.\end{aligned}$$

□

نکته ۱.۳. *در قضیه ۱.۳ سه حالت برای مقدار ϕ' می‌توان در نظر گرفت. حالت اول اگر $\phi'(۱^-) = ۰$ باشد، آنگاه:*

$$\lambda_u = ۲ - ۲^{\frac{۱}{\theta}}. \qquad (۶)$$

جدول ۴-۲ در صفحه‌های ۱۱۷ و ۱۱۹ نلسن [۱۸] را ببینید. حال داریم:

الف) در رابطه (۶) در صورت امکان برای مفصل ارشمیدسی مربوطه، اگر $\theta = \infty$، آنگاه $\lambda_u = ۱$ خواهد شد که در این صورت متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توأم مفصل‌های ارشمیدسی در دم بالا به طور کامل وابسته خواهند بود.

ب) اگر در رابطه (۶) و در صورت امکان برای مفصل ارشمیدسی مورد نظر $\theta = ۱$ شود، آنگاه $\lambda_u = ۰$ خواهد شد که در این صورت متغیرهای تصادفی با تابع توزیع توأم مفصل‌های ارشمیدسی در دم بالا مستقل خواهند بود.

حالت دوم اگر $\phi'(۱^-)$ مقدار ∞ و یا $-\infty$ اختیار کند، آنگاه $\lambda_u = ۱$ می‌شود که نشان دهنده‌ی وابستگی کامل در دم بالا برای این نوع مفصل‌های ارشمیدسی است.

در غیر این صورت اگر $\phi'(۱^-) \in \Re - \{۰, \infty, -\infty\}$ باشد، آنگاه $\lambda_u = ۰$ می‌شود. این بدین معنی است که این نوع مفصل‌های ارشمیدسی (مانند مفصل‌های ارشمیدسی ۳، ۵، ۷، ...، جدول ۴-۱ در نلسن [۱۸] را ببینید) در

دم بالا مستقل خواهند بود.

در ادامه ضرایب وابستگی دمی بالا و پایین را برای مفصل مقدار فرین مورد بررسي قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است که این اندازه‌ها برای مفصل مقدار فرین بر حسب تابع وابستگی پیکندز بیان می‌شوند.

قضیه ۳.۳. *فرض کنید $C_A(u,u)$ تابع مفصل مقدار فرین باشد آنگاه ضرایب وابستگی دمی بالا و پایین این تابع مفصل برابرند با:*

$$\lambda_l = \begin{cases} ۰ & A(\frac{۱}{۲}) > \frac{۱}{۲}, \\ ۱ & A(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}, \end{cases}$$

$$\lambda_u = ۲ - ۲A(\frac{۱}{۲}),$$

که در آن $۱ \leq A(\frac{۱}{۲}) \leq \frac{۱}{۲}$.

اثبات. با توجه به تعریف ضریب وابستگی دمی بالا داریم:

$$\lambda_u = \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{۱ - ۲u + C_A(u,u)}{۱ - u}.$$

با توجه به ویژگی‌های تابع پیکندز $A(t)$ در تعریف ۳.۲، حد فوق هنگامی که $u \longrightarrow ۱^-$، مبهم می‌شود. بنابراین با استفاده از قاعده هوپیتال می‌توان نوشت:

$$\lambda_u = \lim_{u \longrightarrow ۱^-} \frac{-۲ + ۲A(\frac{۱}{۲})u^{۲A(\frac{۱}{۲})-۱}}{-۱} = ۲ - ۲A(\frac{۱}{۲}).$$

به طور مشابه و با استفاده از قاعده هوپیتال، ضریب وابستگی دمی پایین برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{u \longrightarrow ۰^+} \frac{C_A(u,u)}{u} \\ &= \lim_{u \longrightarrow ۰^+} ۲A(\frac{۱}{۲})u^{۲A(\frac{۱}{۲})-۱} \\ &= \begin{cases} ۰ & A(\frac{۱}{۲}) > \frac{۱}{۲}; \\ ۱ & A(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}, \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۴.۳. *فرض کنید $C_A(u,u)$ تابع مفصل مقدار فرین باشد، آنگاه:*

$$\lambda_L = \begin{cases} ۰ & A(\frac{۱}{۲}) > \frac{۱}{۲}, \\ ۱ & A(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}, \end{cases}$$

$$\lambda_U = ۲ - ۲A(\frac{۱}{۲}),$$

که در آن $۱ \leq A(\frac{۱}{۲}) \leq \frac{۱}{۲}$.

اثبات. روش اثبات مشابه اثبات قضیه ۳.۳می‌باشد. □

نکته ۲.۳. *در قضیه‌های ۳.۳ و ۴.۳، اگر $A(\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$ باشد، آنگاه $\lambda_u = ۱$ ($\lambda_U = ۱$) می‌شود که در این صورت X و Y با تابع توزیع توام مفصل‌ها مقدار فرین در دم بالا به طور کامل وابسته خواهند بود. همچنین اگر $A(\frac{۱}{۲}) = ۱$ باشد، آنگاه $\lambda_u = ۰$ ($\lambda_U = ۰$) که در این صورت X و Y با تابع توزیع توام این مفصل‌ها در دم بالا مستقل خواهند بود.*

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه ضرایب وابستگی دمی بالا و پایین مفصل‌های ارشمیدسی و مقدار فرین پرداخته و فرم بسته‌ای برای آنها ارائه دادیم. ضرایب وابستگی دمی بالا مفصل ارشمیدسی را با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای $\phi'(۱^-)$ بررسی کرده و نشان دادیم اگر مقدار $\phi'(۱^-)$ متعلق به $\Re - \{۰, \infty, -\infty\}$ باشد، متغیرهای تصادفی با توزیع توام مفصل‌های ارشمیدسی در دمی بالا مستقل خواهند بود. همچنین نشان دادیم که تحت چه مقادیر از $\phi'(۱^-)$ این مفصل‌های توزیع در دمی بالا به طور کامل

وابسته خواهند بود. در ادامه ثابت کردیم که اگر تابع وابستگی پیکندز مفصل هاي فرین در نقطه $\frac{1}{2}$ برابر با $\frac{1}{2}$ شود، آنگاه متغیرهای تصادفی با این مفصل‌های توزیع در دم بالا به طور کامل وابسته خواهند شد. همچنین متغیرهای تصادفی با توزیع توام مفصل‌های فرین هنگامی در دم بالا مستقل خواهند بود که تابع وابستگی پیکندز در مقدار $\frac{1}{2}$ برابر ۱ شود. قابل توجه است که متغیرهای تصادفی با این مفصل توزیع در دم پایین هنگامی که $A(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$، همواره مستقل هستند.

مراجع

[1] Ane, T. and Kharoubi, C. (2003). Dependence structure and risk measure. Journal of business, 76, 411-438.

[2] Cailault, C. and Guegan, D. (2005). Empirical estimation of tail dependence using capulas: apllication to asian markets. Quantitative Finance, 5(5), 489-501.

[3] Capéraà, P., Fougères, A. L. and Genest, C. (1997) . A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas. Biometrika, 84, 567-577.

[4] Coles, S., Heffernan, J. and Tawn, J. (1999). Dependence measures for extreme value analysis. Extremes, 2, 339-365.

[5] Embrechts, P., Lindskog, F. and Mc Neil, A. (2003). Modeling dependence with copulas and applications to riskmanagement. Elsevier Amesterdam.

[6] Ferreira, H. (2014). Bivariate tail dependence and the generation of multivariate extreme value distributions. Communicitons in Statistics-Theory and Methods, 43, 5318-5325.

[7] Fisher, NI. (1997). Copulas. In: Kotz S, Read CB, Banks DL (eds) Encyclopedia of Statistical Sciences, Update Vol 1. Wiley, New York, 159-163.

[8] Frees, E. W. and Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. North America Actuarial Journal, 2, 1-25.

[9] Genest, C. and Rivest, L. P. (1993). Statistical inference precedures for bivariate archimedeon copulas. Journal of the American Statistical Association, 88, 1034-1043.

[10] Jean A. and Jean-Luc, D. B. (2004). Dependence for archimedean copulas and aging properties of their generating functions. The Indian Journal of Statistics, 66, 607-620.

[11] Jia, X., Cui, L. and Yan, J. (2010). A study on the reliability of consecutive $k-out-of-n:G$ systems based on copula. Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 2455-2472.

[12] Joe, H. (1997). Multivariate models and dependence concepts. London: Chapman and Hall.

[13] Malevergne, Y. and Sornette, D. (2006). Investigating extreme dependencies. Extreme finanicial risks: from dependence to risk managment. Springer, Heidelberg.

[14] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988). Familes of multivariate. Journal of the American Statistical Association, 83, 834-841.

[15] Muller, A. and Scarsini, M. (2005). Archimedean copula and positive dependence. J. Multivariate. Anal, 28, 1-12.

[16] Murlimann, W. (2003). Hutchinson -Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas. Statistics and Probability Letters, 61, 191-198.

[17] Navarro, J. and Spizzichino, F. (2010). Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 26, 775-791.

[18] Nelson, R. B., (2006). An introduction to copulas. Springer, New York.

[19] Pickands, J. (1981). Multivariate extreme value distributions. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 43rd Session, Buenos Aires, 859-878.

[20] Resnick, S. I. (1987). Extreme values, regular variation, and point processes. Springer, New York.

[21] Rezapour, M., Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013). Stochastic comparison of the residual and past lifetimes of $(n-k+1)$-out-of-n systems with dependent components. Communicitons in Statistics-Theory and Methods, 42, 2185-2199.

[22] Sibuya, M. (1960). Bivariate extreme statistic. Annals of the Institute of statistical Mathematics, 11(2), 195-210.

[23] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231.

[24] Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F. and Kalev, P. (2007). Comovement of international equity markets: evidence of unconditional copula-based simulation of tail dependence. Empirical Economices, 36, 201-229.