مقایسه نمودار کنترل ناپارامتری ویلکاکسون با نمودار میانگین

فائقه امیری
گروه آمار، دانشگاه اصفهان

چکیده

بسیاری از نتایج روش‌های استنباط آماری، تحت فرض اینکه متغیرهای مورد مطالعه از توزیع پارامتری خاص، مانند نرمال پیروی می‌کند، به دست می‌آید. اما واقعیت این است که چنین اطلاعاتی به ندرت وجود دارد و در عمل نادر است که فرض‌های توزیعی، به طور دقیق وجود داشته باشد. در چنین شرایطی، ممکن است استفاده از روش‌های پارامتری، نامناسب و استنباط به دست آمده از آن نادرست باشد. برای حل این موضوع، روش‌های استنباط آماری ناپارامتری یا توزیع آزاد پیشنهاد می‌شود. این شرایط در نمودارهای کنترل نیز صادق است. در نمودارهای کنترل اگر فرض‌های توزیعی مرسوم (معمولاً نرمال) برقرار نباشد، عملکرد نمودار کنترل پارامتری ضعیف و غیرقابل اطمینان است. در این شرایط یک نمودار کنترل ناپارامتری می‌تواند جایگزین بهتری باشد. در این مقاله، ضمن معرفی نمودار کنترل ناپارامتری ویلکاکسون، عملکرد این نمودار از طریق شبیه‌سازی بر روی داده‌های تولید شده از توزیع کوشی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کنترل کیفیت آماری، نمودار ناپارامتری ویلکاکسون، نمودار $\bar{X}$.

۱ مقدمه

در کنترل فرآیند آماری، معمولاً فرض می‌شود که متغیر مورد بررسی از توزیع نرمال پیروی می‌کند. توزیع آماره و حدود کنترل به این فرض بستگی دارد و لذا خواص این نمودار در صورتی دقیق است که فرض نرمال برقرار باشد.

در عمل، توزیع متغیر مورد بررسی در بسیاری از کاربردها و نتایج، نامعلوم و یا با فرض نرمال بودن بسیار فاصله دارد و اندازه نمونه نیز آنقدر نیست که از طریق قضیه حد مرکزی نرمال بودن توزیع میانگین جامعه احراز گردد. در این شرایط عملکرد نمودارهای کنترل استاندارد تحت تاثیر فرض نادرست قرار می‌گیرد. یک راه حل ساده، استفاده

از نمودارهای کنترل استوار و انعطاف‌پذیری است که نیاز به فرض نرمال یا هر توزیع پارامتری خاص دیگر ندارد. نمودارهای کنترل ناپارامتری یا توزیع آزاد می‌تواند برای این هدف به کار گرفته شود.

اصطلاح ناپارامتری به این معنی که پارامتری وجود ندارد نیست بلکه کاملاً برعکس است. مثلاً معمولاً پارامتر میانه مورد توجه است. به نظر می‌رسد توزیع آزاد عنوان بهتری از آنچه ما از این نمودارها انتظار داریم باشد ولی اصطلاح ناپارامتری عبارتی است که بیشتر استفاده می‌شود. در متون آماری یک مجموعه وسیع از آزمون‌های ناپارامتری و فاصله اطمینان وجود دارد که مبتنی به هیچ فرض توزیعی نیست و دارای عملکرد عالی در مقایسه با همتایان پارامتری خود می‌باشند. در واقع برای برخی توزیع‌های دم‌کلفت مانند توزیع های دونمایی و کوشی آزمون‌های ناپارامتری می‌تواند کاراتر باشد. زمانی که آگاهی کاملی از توزیع فرآیند برای روش‌های پارامتری داریم روش‌های ناپارامتری معمولاً کارایی کمتری از همتایان پارامتری خود دارند. به هرحال، حقیقت این است که اطلاع از توزیع داده‌ها، اگر نگوییم هرگز، در عمل به ندرت در دسترس است. بنابراین به نظر طبیعی می‌رسد که روش‌های ناپارامتری در کنترل فرآیند آماری توسعه و استفاده شود و به کاربران کنترل کیفیت توصیه می‌شود که این تکنیک‌ها را در بسته لوازم خود داشته باشند. چاکرابورتی و همکاران [۵] یک مجموعه نسبتاً کامل از نمودارهای کنترل ناپارامتری تهیه کرده‌اند. بیشتر روش‌های ناپارامتری مستلزم این است که متغیر مورد بررسی پیوسته باشد. دو مسئله مهم در SPC معمولی پی‌گیری تغییرات میانگین و انحراف معیار فرآیند است. به طور کلی‌تر در یک چارچوب ناپارامتری، پی‌گیری تغییرات پارامترهای مکانی و مقیاس مورد توجه می‌باشد. پارامتر مکانی می‌تواند میانه و یا هر چندک دیگر باشد. به طور طبیعی نموداری که هر دو پارامتر مکانی و مقیاس را کنترل کند معقول‌تر است، اغلب نمودارهای کنترل ناپارامتری موجود فقط به کنترل پارامتر مکانی اختصاص دارند. مقاله حاضر نیز فقط به کنترل میانه اختصاص دارد. یک مرجع نسبتاً جامع برای نمودارهای کنترل یک متغیره ناپارامتری مقاله چاکرابورتی و گراهام [۴] است. زمانی که توزیع مورد مطالعه متقارن است میانگین و میانه یکی هستند و هر یک از این‌ها می‌تواند به عنوان یک اندازه نوعی از مرکز داده‌ها به کار گرفته شود. آزمون ناپارامتری عمومی راجع به میانه یک متغیر پیوسته و متقارن، آزمون رتبه‌ای نشانه ای ویلکاکسون [۱] است. ما این آزمون را به اختصار آزمون ویلکاکسون می‌نامیم. کتاب بهبودیان [۱] یک مرجع خوب برای آشنایی با این آزمون است. نمودار کنترل ویلکاکسون که آن را به اختصار WCC می‌نامیم براساس آزمون مشهور ویلکاکسون استوار است و در مقاله چاکرابورتی و گراهام [۴] تشریح شده است. در مقاله حاضر داده‌هایی از توزیع نرمال و کوشی تولید کرده و دو نمودار کنترل ویلکاکسون و $\bar{X}$ مورد مقایسه قرار داده می‌شود.

۲ نمودار کنترل ویلکاکسون

نمودار رتبه‌ای نشانه‌ای اولین بار توسط بیکر[۲][۳] برای کنترل مرکزیت فرآیند پیشنهاد شد این نمودار در مواردی که توزیع فرآیند متقارن و پیوسته باشد کاربرد دارد. فرض کنید $\underline{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt})^T$ بردار مشاهدات در

[۱] Wilcoxon Signed- Rank Test

[۲] Bakir

زمان t باشد. قدر مطلق انحرافات از $\theta_\circ$ عبارتند از:

$$|X_{1t}-\theta_\circ|, |X_{2t}-\theta_\circ|, \ldots, |X_{nt}-\theta_\circ|,$$

که در آن $\theta_\circ$ میانه معلوم است. آماره کنترل ویلکاکسون برای بررسی $\underline{X}_t$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_t=\sum_{r=1}^{n} sign(X_{rt}-\theta_\circ)R_{rt}, \quad t=1,2,\ldots,$$

که در آن R_{rt} رتبه $|X_{rt}-\theta_\circ|$ در میان n قدر مطلق مقدارانحراف از $\theta_\circ$ می‌باشد و $sign$ یک عملگر است که به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$sign(X_{rt}-\theta_\circ)=\begin{cases} -1, & X_{rt}<\theta_\circ, \\ \circ, & X_{rt}=\theta_\circ, \\ 1, & X_{rt}>\theta_\circ. \end{cases}$$

آماره کنترل W_t دقیقاً همان آماره آزمون ویلکاکسون است که برای t امین نمونه n تایی تعریف شده است. فرض کنید W_t^+ مجموع رتبه‌های دارای علامت مثبت و W_t^- مجموع رتبه‌های دارای علامت منفی در tامین نمونه باشد. در این صورت $W_t=W_t^+-W_t^-$ و $W_t^++W_t^-=\frac{n(n+1)}{2}$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_t^+=\frac{W_t}{2}+\frac{n(n+1)}{4}.$$

در شرایط کنترل، W_t حول صفر متقارن است بنابراین حدود کنترل به صورت زیر است:

$$LCL=-C, \qquad CL=\circ, \qquad UCL=C.$$

تعیین C بستگی به مقدار $ARL_\circ=\frac{1}{\alpha}$ دارد که α احتمال خطای نوع اول است. به این ترتیب C کوچکترین عدد صحیحی است که در نامساوی $P_{\theta_\circ}(W_t\geq C)\leq \alpha/2$ صدق کند این اعداد با استفاده از جدول توزیع آماره رتبه‌ای نشانه‌ای ویلکاکسون که در انتهای کتاب بهبودیان [۱] ضمیمه شده است، قابل حصول است.

در ادامه بخش حاضر چگونگی تعیین C را برای حالت خاص $n=5$ تشریح می‌کنیم. برای $n=5$ با استفاده از جدول مذکور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p(W_t^+\leq \circ) &= p(W_t\leq -15) \\ &= p(W_t\geq 15) \\ &= \circ/\circ 313. \end{aligned}$$

بنابراین اگر حدود کنترل $UCL=15$ و $LCL=-15$ را به کار ببریم احتمال خطای نوع اول برابر است با:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1-p(-15\leq W_t\leq 15) \\ &= 2(\circ/\circ 313) \\ &= \circ/\circ 626. \end{aligned}$$

بنابراین متوسط طول دنباله در شرایط کنترل برابر $ARL_\circ=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\circ/\circ 626}=15/9744$ است.

گاهی معقول تر است که از نمودارهای کنترل یک طرفه استفاده کنیم. اگر مشکوک باشیم که W_t از یک حد بالای مجازی عبور کرده می‌توانیم ناحیه خارج از کنترل را به صورت یک طرفه $W_t\geq 15$ در نظر بگیریم. در این صورت مقادیر خطای نوع اول و متوسط طول دنباله در شرایط کنترل به صورت زیر می‌باشد:

$$\alpha=\circ/\circ 313,$$
$$ARL_\circ=\frac{1}{\circ/\circ 313}=31/9489\simeq 32.$$

۳ مثال شبیه‌سازی

گوییم X دارای توزیع کوشی با پارامترهای θ و λ است و آن را با نماد $X \sim cauchy(\theta, \lambda)$ نشان می‌دهیم هرگاه تابع احتمال آن به فرم زیر باشد:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\pi\{1 + (\frac{x-\theta}{\lambda})^2\}}, \; -\infty < x < \infty, \, \theta \in R, \, \lambda > 0.$$

حالت خاص $\theta = 0$ و $\lambda = 1$ به کوشی استاندارد معروف است. در این توزیع، گشتاورها و تابع مولد گشتاور از جمله میانگین و واریانس وجود ندارد بنابراین نمی‌توان از قضیه حد مرکزی استفاده کرد. یکی از خواص این توزیع که برای تولید داده‌ها از آن استفاده می‌شود. به صورت زیر است.

اگر $X, Y \sim N(0, 1)$ و مستقل باشند آنگاه $\frac{X}{Y} \sim cauchy(0, 1)$ است. برای اطلاع بیشتر به پارسیان [۲] مراجعه کنید. فرض کنید ماتریس Y_1 شامل پنج نمونه به حجم $n = 5$ از توزیع کوشی با پارامترهای $(5, 0.2605)$ و ماتریس Y_2 شامل پنج نمونه به حجم $n = 5$ از توزیع کوشی با پارامترهای $(5.2, 0.2605)$ باشد (بیکر [۳]).

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 4.5884 & 4.7834 & 6.9763 & 5.1670 & 5.7924 \\ 5.1449 & 5.1795 & 5.2011 & 4.6129 & 4.9864 \\ 4.2277 & 4.9805 & 4.7792 & 5.4559 & 5.6247 \\ 5.0043 & 5.0026 & 4.5996 & 5.0897 & 4.6021 \\ 5.0273 & 18.7248 & 4.6564 & 6.9887 & 5.0728 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 5.3664 & 5.2875 & 5.4135 & 5.5867 & 4.7073 \\ 5.3705 & 5.3019 & 5.4855 & 7.0056 & 6.4378 \\ 4.7001 & 5.2688 & 15.2122 & 5.6594 & 5.2497 \\ 5.3868 & 5.5584 & 5.579 & 5.9787 & 5.3047 \\ 5.3706 & 5.3019 & 5.4855 & 7.0056 & 6.4378 \end{bmatrix}.$$

توجیه بیکر [۳] برای انتخاب $\lambda = 0.2605$ این بوده است که مساحت دم‌های توزیع کوشی از نقطه $5 + 1.645$ به بعد و از نقطه $5 - 1.645$ به قبل عیناً برابر با مساحت دم‌های نرمال استاندارد می‌باشد. به عبارت دیگر اگر $X \sim cauchy(5, 0.2605)$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p(X < 5 - 1.645) &= p(X > 5 + 1.645) \\ &= 0.05. \end{aligned}$$

مساحت زیر منحنی کوشی را به سهولت با استفاده از دستور CDF در $MINITAB$ می‌توان محاسبه نمود.
بیکر [۳] دو ماتریس داده‌های Y_1 و Y_2 که هر یک 5×5 هستند را روی هم قرار داده و ماتریس داده‌های $X = [Y_1^T, Y_2^T]^T$ را که یک ماتریس 10×5 است به عنوان داده‌های فاز دوم برای مقایسه نمودار ویلکاکسون و نمودار $\bar{X}$ مورد استفاده قرار داده است. فرآیند محاسبات آماره ویلکاکسون (W_t) برای داده‌های Y_1 و Y_2 به ترتیب در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: محاسبه آماره ویلکاکسون برای توزیع کوشی با مرکز ۵

		$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$X_۴$	$X_۵$	W_t
$t = ۱$	X	۴٫۵۸۸۴	۴٫۷۸۳۴	۶٫۹۷۶۳	۵٫۱۶۷۰	۵٫۷۹۲۴	
	$X - ۵$	−۰٫۴۱۱۶	−۰٫۲۱۶۶	۱٫۹۷۶۳	۰٫۱۶۷۰	۰٫۷۹۲۴	
	$R\|X - ۵\|$	۳	۲	۵	۱	۴	
	$sign\|X - ۵\|$	−۱	−۱	۱	۱	۱	
	$sign.R$	−۳	−۲	۵	۱	۴	۵
$t = ۲$	X	۵٫۱۴۴۹	۵٫۱۷۹۵	۵٫۲۰۱۱	۴٫۶۱۲۹	۴٫۹۸۶۴	
	$X - ۵$	۰٫۱۴۴۹	۰٫۱۷۹۵	۰٫۲۰۱۱	−۰٫۳۸۷۱	−۰٫۰۱۳۶	
	$R\|X - ۵\|$	۲	۳	۴	۵	۱	
	$sign\|X - ۵\|$	۱	۱	۱	−۱	−۱	
	$sign.R$	۲	۳	۴	−۵	−۱	۳
$t = ۳$	X	۴٫۲۲۷۷	۴٫۹۸۰۵	۴٫۷۷۹۲	۵٫۴۵۵۹	۵٫۶۲۴۷	
	$X - ۵$	−۰٫۷۷۲۳	−۰٫۰۱۹۵	−۰٫۲۲۰۸	۰٫۴۵۵۹	۰٫۶۲۴۷	
	$R\|X - ۵\|$	۵	۱	۲	۳	۴	
	$sign\|X - ۵\|$	−۱	−۱	−۱	۱	۱	
	$sign.R$	−۵	−۱	−۲	۳	۴	−۱
$t = ۴$	X	۵٫۰۰۴۳	۵٫۰۰۲۶	۴٫۵۹۹۶	۵٫۰۸۹۷	۴٫۶۰۲۱	
	$X - ۵$	۰٫۰۰۴۳	۰٫۰۰۲۶	−۰٫۴۰۱۴	۰٫۰۸۹۷	−۰٫۳۹۷۹	
	$R\|X - ۵\|$	۲	۱	۵	۳	۴	
	$sign\|X - ۵\|$	۱	۱	−۱	۱	−۱	
	$sign.R$	۲	۱	−۵	۳	−۴	−۳
$t = ۵$	X	۵٫۰۲۷۳	۱۸٫۷۲۴۸	۴٫۶۵۶۴	۶٫۹۸۸۷	۵٫۰۷۲۸	
	$X - ۵$	۰٫۰۲۷۳	۱۳٫۷۲۴۸	−۰٫۳۴۳۶	۱٫۹۸۸۷	۰٫۰۷۲۸	
	$R\|X - ۵\|$	۱	۵	۳	۴	۲	
	$sign\|X - ۵\|$	۱	۱	−۱	۱	۱	
	$sign.R$	۱	۵	−۳	۴	۲	۹

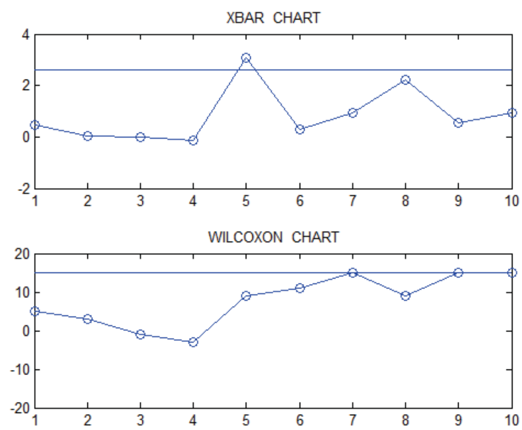
بیکر [۳] یک نمودار کنترل ویلکاکسون یک طرفه با حد کنترل $UCL = ۱۵$ به کار برد. به این ترتیب احتمال خطای نوع اول برابر $\alpha = ۰٫۰۳۱۳$ و متوسط طول دنباله در شرایط کنترل برابر با $ARL_۰ = \frac{۱}{\alpha} = ۳۲$ می‌باشد. برای نمودار کنترل $\bar{X}$ وی فرض نمود که $\sigma = ۱$ معلوم است و آماره $M_t = \bar{X}_t - ۵$ را به عنوان آماره کنترل به کار برده است. برای این که دو نمودار کنترل ویلکاکسون و $\bar{X}$ در شرایط رقابتی یکسان قرار گیرند وی نمودار $\bar{X}$ را نیز به صورت یک طرفه با $\alpha = ۰٫۰۳۱۳$ و $ARL_۰ = \frac{۱}{\alpha} = ۳۲$ در نظر گرفته است. بدین منظور وی حد کنترل را برابر $UCL = ۲٫۶$ در نظر گرفت تا احتمال خطای نوع اول برابر $\alpha = ۰٫۰۳۱۳$ شود. توجیه حد کنترل این است که $X_{rt} - ۵ \sim cauchy(۰, ۰٫۲۶۰۵)$ و براساس خواص توزیع کوشی $\bar{X}_t - ۵ \sim cauchy(۰, ۰٫۲۶۰۵)$ است لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\bar{X}_t - ۵ \geq ۲٫۶) \\ &= ۰٫۰۳۱۷۸۶. \end{aligned}$$

که تقریباً برابر ۰٫۰۳۱۳ می‌باشد. به این ترتیب در شکل ۱ دو نمودار کنترل $\bar{X}$ و ویلکاکسون مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. همان طور که ملاحظه می‌کنید در نمودار کنترل $\bar{X}$ هیچ هشدار صحیحی مبنی بر خارج از کنترل بودن نداریم و یک هشدار نادرست خارج از کنترل متناظر با نمونه پنجم داریم در حالیکه در نمودار کنترل ویلکاکسون هشدار درست خارج از کنترل متناظر با نمونه‌های هفتم، نهم و دهم داریم. در بخش‌های بعدی از طریق مطالعات شبیه‌سازی بیشتری دو نمودار کنترل ویلکاکسون و $\bar{X}$ را مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

جدول ۲: محاسبه آماره ویلکاکسون برای توزیع کوشی با مرکز ۲/۵

		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	W_t
$t=۶$	X	۵/۳۶۶۴	۵/۲۸۷۵	۵/۴۱۳۵	۵/۵۸۶۷	۴/۷۰۷۳	
	$X-۵$	۰/۳۶۶۴	۰/۲۸۷۵	۰/۴۱۳۵	۰/۵۸۶۷	−۰/۲۹۲۷	
	$R\|X-۵\|$	۳	۱	۴	۵	۲	
	$sign\|X-۵\|$	۱	۱	۱	۱	−۱	
	$sign.R$	۳	۱	۴	۵	−۲	۱۱
$t=۷$	X	۵/۳۷۰۵	۵/۳۰۱۹	۵/۴۸۵۵	۷/۰۰۵۶	۶/۴۳۷۸	
	$X-۵$	۰/۳۷۰۵	۰/۳۰۱۹	۰/۴۸۵۵	۲/۰۰۵۶	۱/۴۳۷۸	
	$R\|X-۵\|$	۲	۱	۳	۵	۴	
	$sign\|X-۵\|$	۱	۱	۱	۱	۱	
	$sign.R$	۲	۱	۳	۵	۴	۱۵
$t=۸$	X	۴/۷۰۰۱	۵/۲۶۸۸	۱۵/۲۱۲۲	۵/۶۵۹۴	۵/۲۴۹۷	
	$X-۵$	−۰/۲۹۹۹	۰/۲۶۸۸	۱۰/۲۱۲۲	۰/۶۵۹۴	۰/۲۴۹۷	
	$R\|X-۵\|$	۳	۲	۵	۴	۱	
	$sign\|X-۵\|$	−۱	۱	۱	۱	۱	
	$sign.R$	−۳	۲	۵	۴	۱	۹
$t=۹$	X	۵/۳۸۶۸	۵/۵۵۸۴	۵/۵۷۹	۵/۹۷۸۷	۵/۳۰۴۷	
	$X-۵$	۰/۳۸۶۸	۰/۵۵۸۴	۰/۵۷۹۰	۰/۹۷۸۷	۰/۳۰۴۷	
	$R\|X-۵\|$	۲	۳	۴	۵	۱	
	$sign\|X-۵\|$	۱	۱	۱	۱	۱	
	$sign.R$	۲	۳	۴	۵	۱	۱۵
$t=۱۰$	X	۵/۳۷۰۶	۵/۳۰۱۹	۵/۴۸۵۵	۷/۰۰۵۶	۶/۴۳۷۸	
	$X-۵$	۰/۳۷۰۶	۰/۳۰۱۹	۰/۴۸۵۵	۲/۰۰۵۶	۱/۴۳۷۸	
	$R\|X-۵\|$	۲	۱	۳	۵	۴	
	$sign\|X-۵\|$	۱	۱	۱	۱	۱	
	$sign.R$	۲	۱	۳	۵	۴	۱۵

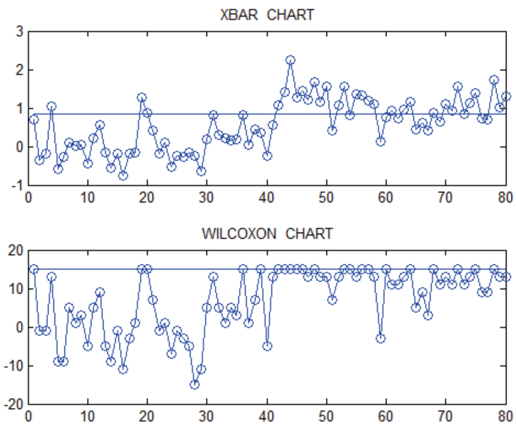


شکل ۱: نمودار کنترل $\bar{X}$ و ویلکاکسون مثال بیکر

۴ مطالعه شبیه‌سازی مقایسه‌ای

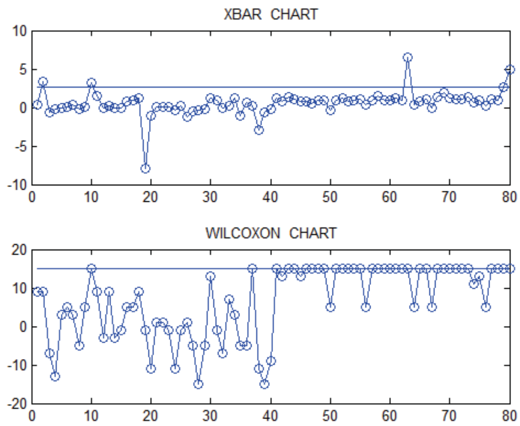
با استفاده از نرم افزار $MATLAB$ تعداد۸۰ نمونه ۵ تایی از توزیع نرمال تولید کردیم. ۴۰ نمونه اول را در شرایط تحت کنترل از توزیع نرمال استاندارد و ۴۰ نمونه دوم را در شرایط خارج از کنترل از توزیع $N(۱,۱)$ تولید کرده‌ایم یعنی میانگین را به اندازه یک انحراف معیار افزایش داده‌ایم. در نمودار یک‌طرفه با $\alpha = ۰/۰۳۱۳$ همان طور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود نمودار $\bar{X}$ نسبت به نمودار ویلکاکسون آلودگی را بهتر تشخیص می‌دهد. نمودار $\bar{X}$ سه نمونه را به اشتباه و بیست و هشت نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده در حالیکه نمودار ویلکاکسون پنج نمونه را به اشتباه و شانزده نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده است. از ۱۰۰۰۰ بار تکرار این مطالعه نتیجه می‌شود که نمودار $\bar{X}$ به طور متوسط از ۴۰ نمونه تحت کنترل ۱/۲۴۰۲ نمونه را به اشتباه خارج کنترل و از ۴۰ نمونه خارج کنترل ۲۵/۷۵۶۵ نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده است و نمودار ویلکاکسون به طور متوسط ۱/۲۶۰۶ نمونه را به اشتباه و ۱۶/۸۷۲۵ نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده است. بنابراین زمانی که توزیع نرمال است

عملکرد نمودار $\bar{X}$ بهتر است.



شکل ۲: نمودار کنترل $\bar{X}$ و ویلکاکسون برای داده‌های نرمال

در مطالعات شبیه‌سازی دیگری داده‌ها را از توزیع کوشی تولید کردیم. به این ترتیب که ۴۰ نمونه اول را در شرایط کنترل از $cauchy(۰, \lambda = ۰/۲۶۰۵)$ و ۴۰ نمونه دوم را در شرایط خارج کنترل از $cauchy(۱, \lambda = ۰/۲۶۰۵)$ تولید کردیم. همان طور که در شکل ۳ ملاحظه می‌کنید عکس نتیجه قبل حاصل می‌شود نمودار $\bar{X}$ دو نمونه را به اشتباه و سه نمونه را به درستی خارج از کنترل را درست تشخیص داده در حالیکه نمودار ویلکاکسون دو نمونه را به اشتباه و سی و یک نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده است. از ۱۰۰۰۰ بار تکرار این مطالعه نتیجه می‌شود که نمودار $\bar{X}$ در ۴۰ نمونه تحت کنترل و خارج کنترل به طور متوسط ۱/۲۷۴۷ نمونه را به اشتباه و ۲/۰۴۳۵ نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده و نمودار ویلکاکسون به طور متوسط ۱/۲۴۵۲ نمونه را به اشتباه و ۲۶/۱۸۳۲ نمونه را به درستی خارج از کنترل تشخیص داده است. لذا زمانی که توزیع کوشی است نمودار ویلکاکسون دارای عملکرد بهتری است در حالیکه زمانی که از توزیع نرمال استفاده می‌شود نمودار $\bar{X}$ دارای عملکرد بهتری می‌باشد.



شکل ۳: نمودار کنترل $\bar{X}$ و ویلکاکسون برای داده‌های کوشی

جدول ۳ قسمتی از نتایج شبیه‌سازی بیکر [۳] است که مقادیر ARL و UCL را برای $n = ۵$ تحت توزیع نرمال و کوشی نشان می‌دهد.

جدول ۳ نشان می‌دهد که در توزیع نرمال، نمودار ویلکاکسون کارایی کمتری از نمودار $\bar{X}$ دارد زیرا دارای متوسط طول دنباله خارج از کنترل بیشتری است. برای مثال در توزیع نرمال با تغییراتی به اندازه ۰/۲ مقدار متوسط طول دنباله در شرایط خارج از کنترل در نمودار $\bar{X}$ و ویلکاکسون به ترتیب برابر ۱۲/۷ و ۱۵/۶ است. بنابراین با توجه به این که متوسط طول دنباله خارج از کنترل ویلکاکسون بیشتر است می‌توان نتیجه گرفت که کارایی نمودار ویلکاکسون کمتر است. در توزیع کوشی نیز با تغییرات به اندازه ۰/۲ مقدار $ARL_۱$ نمودار ویلکاکسون برابر ۵/۶ است که در مقایسه با $ARL_۱$ نمودار $\bar{X}$ کوچکتر می‌باشد لذا نمودار ویلکاکسون دارای کارایی بیشتری است بیکر با مقایسه نمودار $\bar{X}$ و ویلکاکسون در توزیع

جدول ۳: مقادیر ARL برای $n=۵$ در توزیع نرمال و کوشی

	normal		cauchy	
shift $(\theta-\theta_{\circ})$	signed − rank $UCL = ۱۵$	xbar $UCL = ۰/۸۳۳$	signed − rank $UCL = ۱۵$	xbar $UCL = ۲/۶$
۰/۰	۳۲/۰	۳۲/۰	۳۲/۰	۳۲/۰
۰/۲	۱۵/۶	۱۲/۷	۵/۶	۲۹/۱
۰/۶	۵/۰	۳/۳	۱/۲	۲۴/۳
۱/۰	۲/۴	۱/۶	۱/۵	۱۹/۵
۲/۰	۱/۱	۱/۰	۱/۲	۷/۷

یکنواخت، نرمال، دونمایی و کوشی به این نتیجه رسید که برای توزیع نرمال نمودار ویلکاکسون کارایی کمتری دارد این در حالی است که برای توزیع‌هایی با دم کلفت مانند دونمایی و کوشی عکس نتیجه قبل حاصل می‌شود.

۵ نتیجه‌گیری

به طور کلی از جمله مزیت‌های نمودار کنترل ناپارامتری ویلکاسون بر نمودار $\bar{X}$ سادگی آن، عدم نیاز به فرض توزیع خاص برای فرآیند مورد مطالعه، کارایی بیشتر در کشف تغییرات زمانی که توزیع واقعی به طور قابل توجهی غیرنرمال به ویژه با دم کلفت است و عدم نیاز به برآورد واریانس را می‌توان نام برد. همچنین با توجه به مطالعات شبیه‌سازی صورت گرفته می‌توان نتیجه گرفت که نمودار ناپارامتری زمانی که توزیع غیر نرمال و دم کلفت مانند دونمایی یا کوشی است دارای عملکرد بهتری نسبت به نمودار سنتی $\bar{X}$ می‌باشد.

مراجع

[۱] بهبودیان، ج. (۱۳۸۳). آمار ناپارامتری. انتشارات دانشگاه شیراز.

[۲] پارسیان، ا. (۱۳۷۸). مبانی آمار ریاضی. اصفهان: دانشگاه صنعتی اصفهان، مرکز نشر.

[3] Bakir, S. T. (2004). A distribution-free shewhart quality control chart based on signed-ranks. Quality Engineering, 28, 130-140.

[4] Chakraborti S. and Graham M. A. (2008). Nonparametric control chart. Encyclopedia of Quality and Reliability. Wiley: New York, 415-429.

[5] Chakraborti, S., Van Der Laan, P. and Bakir, S. T. (2001). Nonparametric control charts: an overview and some results. Journal of Quality Technology, 33(3), 304-315.