تقریبی برای توزیع مانا در فرایندهای ارگادیگ

رضا فرهادیان
دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان

چکیده

در این مقاله سعی شده است با استفاده از روشی جدید جایگزینی برای استفاده از روش دستگاه چند معادله و چند مجهولی در محاسبه توزیع‌های مانای یک زنجیر تحویل‌ناپذیر قرار دهیم. ابتدا یک سری را معرفی می‌کنیم به طوری که این سری یک ماتریس احتمال اولیه می‌گیرد و با توجه به جمله عمومی که دارد جواب این سری نیز درحالت متناهی و نامتناهی یک ماتریس احتمال است. سپس نشان می‌دهیم که جواب این سری در حالت نامتناهی تقریبی برای توزیع مانای ماتریس احتمال اولیه است و اگر از ماتریس احتمال چند مرحله‌ای استفاده کنیم دقت تقریب بالا می‌رود. این تقریب را RF می نامیم. همچنین چند مطلب مهم را در رابطه با یک ماتریس احتمال خاص به نام ماتریس احتمال مضاعف اثبات کرده و نشان داده‌ایم که تقریب RF برای این ماتریس‌های احتمال مضاعف دقیقاً برابر با توزیع مانای زنجیر است. در نهایت دقت این روش را بطور ریاضی بررسی کرده و با اثبات چندقضیه نشان داده‌ایم که سری مربوط به خطاهای این تقریب در حالت نامتناهی یک سری همگراست که نشان از دقت بالای این تقریب دارد و همچنین نشان داده‌ایم که این تقریب دارای توزیع نرمال است.

واژه‌های کلیدی: زنجیر تحویل‌ناپذیر، فرایند ارگادیک، ماتریس احتمال ، تقریب حدی، توزیع مانا.

۱ مقدمه

در مباحث مربوط به فرایندهای تصادفی معمولاً مسئله پیش‌بینی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و در این پیش‌بینی‌ها اطلاعات گذشته به گونه‌ای در رفتار آینده فرایند موثر است. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی X_0،X_1،$\cdots$، را در نظر گرفته و فرض کنید مجموعه مقادیر ممکن که این متغیرها انتخاب می‌کنند برابر با $\{0, 1, \cdots, M\}$ باشد. اگر X_n رابه عنوان حالتی از یک سیستم در لحظه n در نظر گرفته و چنین تفسیر کنیم که سیستم در لحظه n در حالت i است هرگاه $X_n = i$ باشد، آنگاه دنباله متغیرهای تصادفی اصطلاحاً تشکیل یک زنجیر مارکف می‌دهد اگر هر وقت سیستم در حالت

i است با احتمال ثابتی که آن را P_{ij} می‌نامیم به حالت j تغییر حالت دهد. یعنی برای همه مقادیر $i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}$؛ i و j داریم [۱، ۸، ۹]:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} &= j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_1 = i_1, \\ X_0 = i_0\} &= P_{ij}. \end{aligned}$$

مقادیر P_{ij} $(0 \le i \le M, 0 \le j \le M)$ که احتمال‌های تغییر وضعیت برای زنجیر مارکف نامیده می‌شوند، خصوصیات زیر را دارا می‌باشند:

$$P_{ij} \ge 0, \quad \sum_{j=0}^{M} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \cdots, M,$$

که اگر این احتمال‌های تغییر وضعیت را به صورت ماتریس مربعی نشان دهیم به این ماتریس، ماتریس احتمال انتقال می‌گوییم و بصورت زیر آن را نشان می‌دهیم : [۴]

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix}.$$

با توجه به این تعاریف اساسی مبحث مهمی که در رابطه با فرایندهای تصادفی و زنجیرهای مارکف وجود دارد مسئله توزیع‌های مانا و شرایط یکتایی آن است. توزیع π را توزیع مانای زنجیر مارکف $\{X_n : n \ge 0\}$ با ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت $P = (p_{xy})$ گوییم هرگاه به ازای هر y داشته باشیم:

$$\pi(y) = \sum_{x} \pi(x) p_{xy}, \qquad \forall y.$$

برای محاسبه عملی $\pi(y)$ معمولاً از روش حل یک دستگاه چند معادله و چند مجهول استفاده می‌شود که با بزرگ شدن ماتریس احتمال کار کردن با این دستگاه دشوار می‌شود [۵]. در شرایط خاصی که زنجیر تحویل‌ناپذیر و بازگشتی مثبت و نادوره‌ای است (زنجیرهای مارکف ارگادیک[۱])، قضیه‌ای وجود دارد که بیان می‌کند توزیع مانا همان احتمالات انتقال در مراحل بسیار بالای فرایند هستند که با بیان ریاضی می‌توان نوشت [۴]:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^n.$$

در این مقاله نیز روشی ارائه شده است که تقریبی دقیق از $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$ را به ما می‌دهد و این محاسبه را بسیار عملی و ساده‌تر می‌سازد زیرا عملاً محاسبه توان نامتناهی یک ماتریس کار ساده‌ای نیست. در این روش بطور مستقیم از ماتریس احتمال استفاده می‌کنیم. این تقریب که یک تقریب مرحله‌ای است، ضمن دربرگیری تعریف توزیع مانا (دقت در مرحله نامتناهی این تقریب برابر توزیع مانا است) در مراحل پایین مقداری بسیار نزدیک به توزیع مانا را به ما می‌دهد که برای فرایندهای با بعد فضای حالت بزرگ بسیار کارآمد است. در واقع هدف اصلی این مقاله نیز بررسی توزیع مانا برای فرایندهای بزرگ است.

[۱] Ergodic

۲ سری ماتریس احتمال تقریب‌ساز

در این مقاله یک سری بر حسب ماتریس‌های احتمال ارائه داده‌ایم که جواب این سری در حالت متناهی و نامتناهی همواره ماتریسی احتمال است. این سری به صورت زیر است:

$$\Psi_n = \sum_{i=0}^{m} \frac{[p_n]_i}{2^m}, \quad \begin{cases} [P_n]_0 = P_n, \\ [P_n]_t = \frac{j_n}{n} \sum_{i=0}^{t-1} [P_n]_i. \end{cases} \qquad (1)$$

Ψ_nماتریس احتمالی است که از سری فوق حاصل می‌شود و $[P_n]_t$ یک تابع است که به صورت بالا تعریف شده و آن را تابع احتمال‌ساز سری ماتریسی RF می‌نامیم و P_n هم ماتریس احتمال $n \times n$ اولیه است. حالت خاصی از این سری که در ادامه کاربرد آن را خواهیم گفت به صورت زیر می‌باشد:

$$\Psi_n = \sum_{i=0}^{m} a_i = \frac{(nP_n + (2^m - 1)j_n}{n 2^m}, \qquad (2)$$

$$if \begin{cases} a_0 = P_n, \\ a_i = \frac{1}{2}\left(a_{i-1} + \frac{j_n}{n}\right), \end{cases}$$

$$\textbf{and} \quad \mathbf{j_n} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

جواب سری ماتریس احتمال (۲) در حالت نامتناهی به یک ماتریس احتمال خاص همگرا است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \frac{j_n}{n}, \quad if \begin{cases} a_0 = P_n, \\ a_i = \frac{1}{2}\left(a_{i-1} + \frac{j_n}{n}\right). \end{cases}$$

بدیهی است که در سری،

$$\Psi_n = \sum_{i=0}^{m} a_i = \frac{nP_n + (2^m - 1)j_n}{n 2^m},$$

احتمال انتقال یک مرحله‌ای ψ_{xy} به سادگی قابل محاسبه است:

$$\psi_{xy} = \frac{1}{2^m}[p_{xy} + \frac{2^m - 1}{n}].$$

بطور کلی اگر $\Psi_n = \sum_{i=0}^{m} \frac{[P_n]_i}{2^m}$ باشد در این صورت برای ψ_{xy} و p_{xy} و فضای حالت $l = \{0, 1, \cdots\}$ معادله زیر را داریم:

$$2^m \psi_{xy} - p_{xy} = \frac{1}{n}(2^m - 1) \sum_{j=0}^{n-1} p_{jy}. \qquad (3)$$

استفاده از این معادله در به دست آوردن جواب سری (۱) در حالت نامتناهی بسیار کاربرد دارد. اگر در حالت نامتناهی با استفاده از معادله (۳) درایه‌های مربوط به ماتریس را به دست آوریم جواب سری در حالت نامتناهی نیز یک ماتریس احتمال و بصورت زیر است:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{[p_n]_i}{2^m} = \frac{1}{n} j_n P_n.$$

در واقع سری ماتریس احتمال $\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m}$ دارای یک رابطه فوریه است که به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m} &= \frac{P_n+(2^m-1)\lim_{z\to\infty}\sum_{i=0}^{z}\frac{[p_n]_i}{2^z}}{2^m}\\ &= \frac{nP_n+(2^m-1)j_nP_n}{n2^m}. \qquad (4)\end{aligned}$$

مثال ۱.۲. *اگر در سری $\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m}$ ماتریس احتمال برابر $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد و $m=25$ در این صورت جواب سری فوق را به دست آورید.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{25}\frac{[p_n]_i}{2^{25}} &= \frac{2P_2+(2^{25}-1)j_2P_2}{2\times 2^{25}}\\ &= \frac{2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+(2^{25}-1)\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}}{2\times 2^{25}}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای m های بزرگ استفاده از فرمول فوریه برای محاسبه سری بهتر است و محاسبه را ساده می‌کند.

۳ تقریب RF برای توزیع مانا

در فرایندهای تصادفی اثبات شده است که برای یک زنجیر تحویل‌ناپذیر بازگشتی مثبت و نادوره‌ای می‌توان توان‌های بزرگ برای ماتریس احتمال را بطور تقریبی با استفاده از توزیع مانای زنجیر محاسبه کرد [۵] که همین محاسبه هم می‌تواند برای ماتریس‌های احتمال با بعد بزرگ کاری دشوار باشد. در اینجا روشی را ارائه می‌دهیم که مستقل از توزیع مانا عمل میکند و تقریبی نزدیک به مقدار واقعی به دست می‌دهد. برای درک بهتر این موضوع باید گفت که کاربردی از سری ماتریس‌های احتمال است که در قسمت قبل در مورد آن توضیح دادیم. این تقریب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تقریبRF: اگر $[x_n : n \geq 0]$ زنجیری تحویل‌ناپذیر، بازگشتی مثبت و نادوره‌ای با فضای حالت متناهی باشد و P_n ماتریس احتمال این زنجیر باشد، دراین صورت داریم:

$$\lim_{m\to\infty}P_n^m \cong \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n^k]_i}{2^m}=\frac{1}{n}j_nP_n^k,\ k<\infty.$$

که در آن k دقت تقریب و عددی طبیعی و متناهی است و به آن دقت مرحله‌ای می‌گوییم. بدیهی است اگر k را بسیار بزرگ در نظر بگیریم حالت برابری رخ می‌دهد، یعنی:

$$\lim_{m\to\infty}P_n^m=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n}j_nP_n^k.$$

یعنی اگر $\lim_{m\to\infty}P_n^m=T_n$ در این صورت داریم:

$$T_n=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n}j_nP_n^k.$$

مثال ۱.۳. *برای ماتریس احتمال $P_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ با استفاده از روش‌های محاسبه توزیع مانا در فرایندهای تصادفی $\lim_{m\to\infty}P^m=\begin{bmatrix}\frac{3}{23} & \frac{4}{23} & \frac{16}{23}\\ \frac{3}{23} & \frac{4}{23} & \frac{16}{23}\\ \frac{3}{23} & \frac{4}{23} & \frac{16}{23}\end{bmatrix}$ به دست آمده است. با استفاده از تقریب RF با دقت یک مرحله‌ای و*

دو مرحله‌ای مقدار تقریبی $\lim_{m\to\infty} P_3^m$ را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.

حل: ابتدا با استفاده از تقریب یک مرحله‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_3^m &\cong \frac{1}{3} j_3 P_3\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{12} & \frac{23}{36}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{12} & \frac{23}{36}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{12} & \frac{23}{36}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

حالا با استفاده از تقریب دو مرحله‌ای این محاسبه را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_3^m &\cong \frac{1}{3} j_3 P_3^2\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{144} & \frac{305}{432}\\ \frac{29}{216} & \frac{23}{144} & \frac{305}{432}\\ \frac{29}{216} & \frac{23}{144} & \frac{305}{432}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

با مقایسه دقت محاسبه می‌توان در این مثال نتیجه گرفت که تقریب دو مرحله‌ای نسبت به تقریب یک مرحله‌ای به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

ممکن است در مسائل مختلف حالت‌های متفاوتی برای تعداد مراحل تقریب وجود داشته باشد اما به طور کلی اگر مراحل تقریب را به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیریم تقریب به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شود.

نتیجه ۱.۳. تقریب RF با دقت بینهایت همان مقدار حدی توزیع مانا است.

اثبات.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_n^m &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} j_n P_n^k\\
&= \frac{1}{n} j_n \lim_{k\to\infty} P_n^k.
\end{aligned}$$

حالا برای درایه (x,y) در $\frac{1}{n} j_n \lim_{k\to\infty} P_n^k$ داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n-1} P_{xy}^k &= \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n-1} \lim_{k\to\infty} P_{xy}^k\\
&= \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n-1} \pi(y)\\
&= \pi(y).
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۲.۳. برای یک فرایند تصادفی ارگادیک با ماتریس احتمال مضاعف (ماتریس احتمالی که ترانهاده آن نیز یک ماتریس احتمال است) تقریب RF برابر با مقدار واقعی و به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P_n^m &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{[p_n]_i}{2^m}\\
&= \frac{1}{n} j_n.
\end{aligned}$$

یا به بیان دیگر در فرایند تصادفی مضاعف خطای تقریب RF برابر صفر است.
برای مثال ماتریس‌های احتمال با الگوی ماتریسی $\frac{aI_n+bj_n}{a+nb}$ وقتی $a,b\in\mathbb{R}^+$، مضاعف هستند، بنابراین:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{aI_n+bj_n}{a+nb}\right)^m = \frac{1}{n} j_n,$$

که I_n ماتریس همانی (واحد) است. با ارجاع به [1] یک ماتریس احتمال مضاعف با الگوی $\frac{aI_n+bj_n}{a+nb}$ را می‌توان به

صورت زیر نمایش داد که در آن H_n یک ماتریس خاص به نام ماتریس هیلمرت[2] است:

$$\frac{aI_n+bj_n}{a+nb}=H_n\begin{bmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{a}{a+nb}\end{bmatrix}\acute{H}_n,$$

که ماتریس H_n بصورت زیر است [1]:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(j-1)j}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(j-1)j}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{(n-1)}{\sqrt{(n-1)n}}\end{bmatrix}.$$

با استفاده از این الگو می‌توان به دو قضیه زیر دست یافت.

قضیه ۱.۳ . *حاصلضرب تعداد نامتناهی ماتریس احتمال مضاعف نادوره‌ای با بعد متناهی و بصورت $\frac{a_iI_n+b_jj_n}{a_i+nb_j}$ وقتی $a_i,b_i\in\mathbf{R}^+$ برابر $\frac{1}{n}j_n$ است.*

قضیه ۲.۳ . *حاصلضرب تعداد نامتناهی ماتریس احتمال بصورت $\frac{a_iP_{ni}+b_ij_n}{a_i+nb_i}$ برابر $\frac{1}{n}j_n$ است اگر و تنها اگر $0<\frac{a_i}{a_i+nb_i}<1$ و P_{ni} ماتریس احتمال مضاعف دلخواه باشد.*

با استفاده از ماتریس هیلمرت می‌توان ماتریس‌های احتمالی ساخت که وارون آنها نیز ماتریسی احتمال است. الگوی ساخت چنین ماتریس احتمال‌هایی بصورت زیر است:

$$D_n = H_n\begin{bmatrix}1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & -1 & \cdots & & 0\\ \vdots & \cdots & \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}\acute{H}_n \longrightarrow$$

$$\begin{cases} D_n = D_n^{-1},\\ D_n^{2k+1} = D_n,\\ D_n^{2k} = I_n.\end{cases}$$

برای نمونه، فرایندهای تصادفی وارون‌دار با بعد ۲ و ۳ دارای ماتریس احتمال بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} D_2 &= H_2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\acute{H}_2\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= H_3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\acute{H}_3\\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

[2] Helmert

با استفاده از این الگوی مشخص می‌توان به این سوال که آیا ماتریس احتمالی جز ماتریس (ماتریس همانی) وجود داردکه وارون آن نیز یک ماتریس احتمال باشد، پاسخ مثبتی داد. از مسائل دیگری که در رابطه با سری ماتریس (۱) وجود دارد دترمینان آن است که وابسته به دترمینان P_n می‌باشد. باتوجه به رابطه فوریه (۴) می‌توان نشان داد، دترمینان سری ماتریس احتمال $\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m}$ برابر است با:

$$det(\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m}) = (\frac{1}{2^{n-1}})^m det(p_n).$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} det(\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\frac{[p_n]_i}{2^m}) &= \lim_{m\to\infty}(\frac{1}{2^{n-1}})^m det(p_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

تا اینجا به بررسی ساختاری تقریب RF پرداختیم. در قسمت‌های بعد این تقریب را از نظر آماری بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مجموع نامتناهی خطاهای مربوط به این تقریب همواره مقداری همگراست.

۴ بررسی دقت تقریب RF

همانطور که در قسمت‌های قبل گفته شد برای یک فرایند با ماتریس احتمال مضاعف، تقریب حدی RF بادقت یک مرحله‌ای همان مقدار حقیقی توزیع مانا است. اما در خیلی از فرایندها نمی‌توان بطور قطعی مرحله‌ای متناهی را انتخاب کرد که در آن مرحله خطای تقریب صفر باشد. بنابراین باید از طریق بررسی‌های آماری جملات خطای تقریب RF با توزیع مانا در هر مرحله، مرحله‌ای از تقریب را پیش‌بینی کرد که کمترین خطای ممکن را داراست. عملا پیدا کردن بهترین مرحله برای تقریب زدن در خیلی از مسائل قابل انجام است، اما بطور کلی با اجتناب از اثبات‌های طولانی با ارائه چند قضیه زیر دقت تقریب RF را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. *در یک زنجیر تحویل‌ناپذیر و بازگشتی مثبت و نادوره‌ای با فضای حالت متناهی،*

$$l = \{0, 1, \cdots, d = n-1\},$$

اگر $\pi_j^{(k)}$ تقریب π_j باشد، همواره داریم:

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty}|\pi_j^{(k)} - \pi_j| < \infty,$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{\infty}(\pi_j^{(k)} - \pi_j)^2 < \infty.$$

نتیجه ۱.۴. *در قضیه ۱.۴ چون سری $\sum_{k=1}^{\infty}|\pi_j^{(k)} - \pi_j|$ و سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\pi_j^{(k)} - \pi_j)^2$ هر دو همگرا هستند، در نتیجه طبق قضایای مربوط به همگرایی مطلق سری‌ها [۶]، باید سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\pi_j^{(k)} - \pi_j)$ نیز همگرا باشد.*

قضیه ۲.۴. *اگر $\{X_n : n \geq 0\}$، یک زنجیر مارکف با فضای حالت $l = \{0, 1\}$ و ماتریس احتمال تغییر وضعیت $\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$ باشد که در آن $0 < a < 1$ و $0 < b < 1$ است، در این صورت:*

$$\begin{aligned} 1)\ \sum_{k=1}^{\infty}(\pi_0^{(k)} - \pi_0) &= -\sum_{k=1}^{\infty}(\pi_1^{(k)} - \pi_1) \\ &= \frac{a-b}{2(a+b)}, \\ 2)\ \sum_{k=1}^{\infty}(\pi_0^{(k)} - \pi_0)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}(\pi_1^{(k)} - \pi_1)^2 \\ &= \frac{(a-b)^2}{4(a+b)^2[1-(1-a-b)^2]}. \end{aligned}$$

در خیلی از فرایندها این همگرایی‌ها قابل محاسبه هستند. برای مثال اگر جملات خطا بصورت یک دنباله هندسی با قدرنسبتی در بازه $[0, 1)$ تغییر کنند، مقدار همگرایی را می‌توان محاسبه کرد.

مثال ۱.۴. *(مثال ۹.۳.۳ کتاب فرایندهای تصادفی [۵]) زنجیر ارنفست[3] با فضای حالت $\{0, 1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. توزیع مانای این زنجیر بصورت زیر بدست آمده است:*

$$\pi_0 = \frac{1}{8}, \quad \pi_1 = \frac{3}{8}, \quad \pi_2 = \frac{3}{8}, \quad \pi_3 = \frac{1}{8}.$$

تقریب‌های تا دقت سه مرحله‌ای را برای این زنجیر محاسبه کرده و در جدول ۱ خلاصه کرده‌ایم.
مقدار خطای قابل پیش‌بینی بین تقریب RF و توزیع

جدول ۱: تقریب‌های تا دقت سه مرحله‌ای زنجیر ارنفست

$\pi_3^{(1)} = \frac{1}{12}$	$\pi_2^{(1)} = \frac{5}{12}$	$\pi_1^{(1)} = \frac{5}{12}$	$\pi_0^{(1)} = \frac{1}{12}$
$\pi_3^{(2)} = \frac{5}{27}$	$\pi_2^{(2)} = \frac{13}{362}$	$\pi_1^{(2)} = \frac{13}{36}$	$\pi_0^{(2)} = \frac{5}{27}$
$\pi_3^{(3)} = \frac{13}{108}$	$\pi_2^{(3)} = \frac{41}{108}$	$\pi_1^{(3)} = \frac{41}{108}$	$\pi_0^{(3)} = \frac{13}{108}$

مانا یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ است، یعنی:

$$|\pi_j^{(k)} - \pi_j| = \frac{|\pi_j^{(1)} - \pi_j|}{3^{(k-1)}}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

برای حالت j ام مجموع مقادیر مثبت شده خطاها بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\pi_j^{(k)} - \pi_j| &= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} |\pi_j^{(1)} - \pi_j| \\ &= \frac{3}{2} |\pi_j^{(1)} - \pi_j|. \end{aligned}$$

[3]Eherenfest

برای نمونه برای حالت صفر داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\pi_0^{(k)} - \pi_0| = \frac{1}{8},$$

که برابر با π_0 است. از طرفی برای همین حالت صفر مجموع مربعات خطا در حالت نامتناهی برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\pi_0^{(k)} - \pi_0)^2 &= \frac{(\pi_0^{(1)} - \pi_0)^2}{1 - (\frac{1}{3})^2} \\ &= 0/001953124. \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\pi_j^{(k)}$ را یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم امید ریاضی و واریانس آن همواره مقداری متناهی است. باتوجه به قانون قوی اعداد بزرگ [۴] می‌توان نشان داد که $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_j^{(k)} = \pi_j$ است. یعنی اگر $\pi_j^{(k)}$ متغیری تصادفی باشد $E(\pi_j^{(k)}) = \pi_j$ می‌باشد.
از طرفی چون $\sum_{k=1}^{\infty} (\pi_j^{(k)} - \pi_j)^2 < \infty$ است در نتیجه مجموع‌های جزئی سری فوق بنا به قضایای سری‌های همگرا کران‌دار است و به این معنی است که هر متغیر $\pi_j^{(k)}$ دارای واریانس متناهی $\sigma^2_{\pi_j^{(k)}}$ است. این دو موضوع مهم را در قضایای زیر اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۴. *اگر $\pi_j^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ تقریب π_j باشد، آنگاه $E(\pi_j^{(k)}) = \pi_j$ است.*

قضیه ۴.۴. *در یک زنجیر تحویل‌ناپذیر و بازگشتی مثبت و نادوره‌ای با فضای حالت متناهی،*

$$l = \{0, 1, \cdots, d = n - 1\},$$

اگر $\pi_j^{(k)}$ تقریب π_j و باشد $\pi_j^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ متغیری تصادفی با امید $E(\pi_j^{(k)}) = \pi_j$ و واریانس

متناهی $\sigma^{۲}_{\pi_j^{(k)}}$ فرض شود، همواره داریم:

$$E[\sum_{k=۱}^{\infty}(\pi_j^{(k)}-\pi_j)^{۲}]=\sum_{k=۱}^{\infty}\sigma^{۲}_{\pi_j^{(k)}}.$$

توجه داشته باشید $\infty > \sigma^{۲}_{\pi_j^{(k)}}$ زیرا $\sum_{k=۱}^{\infty}(\pi_j^{(k)}-\pi_j)^{۲}$ همگراست و در نتیجه میانگین و مجموع‌های جزئی آن نیز مقداری متناهی است.

نتیجه ۲.۴. *(قضیه حد مرکزی برای متغیر $\pi_j^{(k)}$) با بررسی شرایط قضیه حد مرکزی [۳، ۴] برای متغیر $\pi_j^{(k)}$ $(k=۱,۲,۳,\cdots)$ می‌توان ثابت کرد $\pi_j^{(k)}$ ها دارای توزیع نرمال هستند:*

شرط اول: $\pi_j^{(k)}$ ها بطور یکنواخت کراندار هستند و می‌توان این کران را عدد یک تعریف کرد زیرا $\pi_j^{(k)} < ۱$ است، بنابراین:

$$P(\pi_j^{(k)}<۱)=۱.$$

شرط دوم: اگر $\sigma^{۲}\pi_j^{(k)}$ واریانس $\pi_j^{(k)}$ $(k=۱,۲,۳,\cdots)$ باشد، ثابت کردیم که $\sum_{k=۱}^{\infty}\sigma_{\pi_j^{(۲)}}<\infty$ و در نتیجه بنا به قضایای ۳.۴ و ۴.۴ داریم:

$$\lim_{n\to\infty}P[\frac{\sum_{k=۱}^{n}(\pi_j^{(k)}-\pi_j)}{\sqrt{\sum_{k=۱}^{n}\sigma^{۲}_{\pi_j^{(k)}}}}\le a]$$
$$=\lim_{n\to\infty}P[\frac{\sum_{k=۱}^{n}(\pi_j^{(k)}-\pi_j)}{\sqrt{\sum_{k=۱}^{\infty}(\pi_j^{(k)}-\pi_j)^{۲}}}\le a]$$
$$=\Phi(a).$$

۵ مقایسه روش تقریبی RF با تعریف توزیع مانا و روش دستگاه معادلات خطی

اغلب ساده‌ترین روش محاسبه توزیع مانا همان تعریف آن است. یعنی زمانی که به بررسی خصوصیات یک فرایند بعد از یک دوره طولانی از زمان، به خصوص به بررسی اینکه آیا رفتار آن استمرار یافته است یا نه؟، علاقه‌مندیم زنجیر مارکفی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم [۷] و [۲]:

$$\lim_{k\to\infty}P_{(i,j)}^{(k)}=\pi_j.$$

یعنی احتمال اینکه فرایند بعد از مدت طولانی در حالت j باشد، وقتی بدانیم از حالت i شروع شده و از حالت i مستقل باشد وقتی $k\to\infty$ ماتریس احتمال به ماتریس متشکل از بردارهای توزیع مانا میل می‌کند و تمام سطرهای آن یکسان خواهد شد. π_j را احتمال‌های حدی یا حالت پایای زنجیر می‌نامند. این همان چیزی است که ما طور بنیادی و در زنجیرهای با بعد کوچک به عنوان بهینه‌ترین روش و تعریف توزیع مانا می‌شناسیم. با کمی دقت مشخص است هر چه بعد فضای حالت در فرایندی تصادفی بزرگ‌تر شود، کارایی استفاده از این روش به مراتب کمتر می‌شود. اما زمانی که ما از تقریب $\lim_{m\to\infty}P_n^m\cong\frac{۱}{n}j_nP_n^k$ استفاده می‌کنیم، در واقع ضمن حفظ تعریف دقیق توزیع مانا توان ماتریس احتمال را از حالت نامتناهی خارج می‌کنیم و با توانی متناهی تقریبی از مقدار حدی توزیع مانا بدست می آوریم و این کار به ما کمک می‌کند تا برای فرایندهای با فضای حالت بزرگ

راحت‌تر بتوانیم توزیع مانا را بررسی کنیم و بطور تقریبی رفتار استمرار یافته آن در زمانی طولانی را پیش‌بینی کنیم. می‌توان نشان داد که π_j ها برای $j = ۱, ۲, \cdots, N$ جواب یکتای دستگاه معادلات خطی زیر می باشند [۸،۷]:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_{(i)} P_{(i,j)}, & \\ & j \in E = \{۱, ۲, \cdots, N\}. \\ \sum_{i \in E} \pi_{(j)} = ۱, & \end{cases}$$

با توجه به دستگاه بالا مشخص است که هر چه N بزرگ شود، کارایی این روش هم کم می‌شود. برای مثال فرض کنید بعد ماتریس احتمال مربوط به فرایند ۱۰×۱۰ باشد و خطاهای مرحله‌ای تقریب RF مربوط به این فرایند بصورت دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۱۰۰}$ پیش بروند. اگر از روش دستگاه چند معادله و چند مجهولی بخواهیم توزیع‌های مانا را بدست آوریم باید یک دستگاه ۱۱ معادله و ۱۰ مجهولی تشکیل دهیم که در این صورت انجام دادن محاسبات بسیار دشوار می‌شود. حالا اگر از تقریب RF استفاده کنیم با توجه به قدر نسبت خطاها کافی است از تقریب با دقت ۱۰ مرحله‌ای استفاده کنیم که در این صورت تقریب با مقدار واقعی منطبق است و از نظر محاسباتی بسیار به صرفه‌تر است. قطعا اگر بخواهیم این محاسبات را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای انجام دهیم، عملیات ضرب ماتریسی تا ۱۰مرتبه سریعتر از جواب‌های یک دستگاه معادلاتی با ۱۱ معادله و ۱۰ مجهول انجام می‌شود. پس می‌توان نتیجه‌گرفت که کارایی روش RF تقریبی با بزرگ شدن فضای حالت فرایند بیشتر می‌شود.

۶ بحث و نتیجه گیری

تاکنون روش‌های متعددی برای محاسبه توزیع مانا بکار گرفته شده است که مهمترین آنها را می‌توان استفاده از دستگاه چند معادله و چند مجهولی دانست اما باید گفت که این روش برای فرایندهایی که بعد (تعداد حالت‌ها) آنها بزرگ است کارایی زیادی ندارد زیرا هرچه دستگاه معادلاتی بزرگ باشد کارکردن با آن سخت می‌شود. در این مقاله سعی کردیم توزیع مانا را با در دست داشتن ماتریس احتمال فرایند تقریب زنیم با این رویکرد که اگر بعد فرایند هم بزرگ شود این تقریب کار خود را بخوبی انجام دهد. روشی که ارائه شد روشی تقریبی است که در مقایسه با روش دستگاه معادلاتی می‌تواند سرعت عمل محاسبه را بالا برده و برای فرایندهای بزرگ عملکرد بهتری داشته باشد. همچنین این روش در مقایسه با تعریف توزیع مانا که می‌گوید حد نامتناهی توان ماتریس احتمال برابر توزیع ماناست نیز بهتر عمل می‌کند زیرا ضمن دربرگیری این تعریف، تقریب را با استفاده از توان‌های متناهی انجام می‌دهد.

مراجع

[۱] ارقامی، ن. ر. (۱۳۲۸). جبر خطی برای آمار. انتشارات پیام نور، چاپ اول آزمایشی آبان ۱۳۸۵.

[۲] افقهی، م. ح. (۱۳۶۷). آشنایی با فرایندهای تصادفی، ترجمه، مرکز نشر دانشگاهی.

[۳] بهبودیان، ج. (۱۳۷۷). آمار و احتمال مقدماتی. دانشگاه امام رضا(ع)، مشهد.

[۴] پارسیان، الف. و زینل همدانی، ع. (۱۳۸۳). مبانی احتمال. ترجمه، مؤلفین: شلدون، ر. نشر شیخ بهایی، اصفهان.

[۵] پاشا، ع. الف. (۱۳۲۸). فرایندهای تصادفی. انتشارات پیام نور، چاپ اول ۱۳۷۴ و چاپ هفتم ۱۳۹۰.

[۶] عالم‌زاده، ع. الف. (۱۳۶۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه تحلیلی (جلد دوم). ترجمه، مؤلفین: لیت هولد، ل. موسسه نشر علوم نوین، تهران.

[7] Karlin, S. and Taylor, M. (1975). A first course in stochastic process.

[8] Kemeny, J. G., Snell, J. L. and Knapp, A. W. (1966). Denumberable Markov Chains, with a chapter of Markov Random Fields by David Griffeath. D.VanNostrand Company, Newyork.

[9] Parzen, E. (1962). Stochastic Processes. SanFrancisco: Holden-Day, Inc.