

توزیع چوله - نرمال تعمیم یافته‌ی انعطاف پذیر

ستار خدادوستان، محمدرضا براتی آبگرمی
گروه آمار، دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه یزد
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

بعد از معرفی توزیع چوله-نرمال توسط آزالینی [۳]، توزیع‌های چوله-متقارن گوناگونی توسط محققان بررسی و معرفی شده است. در این مقاله توزیع جدیدی را که توسط نکوخو و همکاران [۷، ۸] تعمیم یافته است، معرفی می‌کنیم. این توزیع جدید شامل تعداد پارامتر بیشتری است، بنابراین در مدل‌سازی داده‌ها از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردار است. ابتدا به معرفی مختصر توزیع جدید و سپس به تشریح رابطه‌ی توزیع جدید با توزیع‌های شناخته‌شده‌ی دیگر می‌پردازیم. در نهایت توانایی مدل جدید در تحلیل داده‌های واقعی نسبت به مدل‌های رقیب را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع چوله-متقارن، توزیع چوله-نرمال، توزیع چوله-نرمال انعطاف‌پذیر، توزیع چوله-نرمال تعمیم یافته‌ی انعطاف‌پذیر، برآورد ماکزیمم درستنمایی، ضرایب اطلاع.

۱ مقدمه

به طوری که f یک تابع چگالی متقارن (حول نقطه صفر) است و k یک تابع اندازه‌پذیر لبگ به صورت زیر است:

$$0 \leq k(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{الف})$$

$$k(x) + k(-x) = 1, \quad \mathbb{R} \text{ روی} \quad (\text{ب})$$

اخیراً توزیع‌هایی مورد توجه قرار گرفته‌اند که خانواده‌ی الف) توزیع‌های چوله-متقارن^۱ نام دارند و دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشند:

$${}^2 f(x)k(x),$$

به خصوص k را می‌توان یک تابع توزیع متقارن مطلقاً پیوسته در نظر گرفت. به عنوان یک حالت خاص، k را می‌توان تابع توزیع تجمعی F در نظر گرفت [۲].

^۱ Skew-Symmetric

ناداراجا و کوتز [۶] خانواده‌ی توزیع‌های چوله-نرمال متقارن را به صورت زیر معرفی کردند:

$${}^2\phi(x)F(\lambda x),$$

به طوری که ϕ چگالی توزیع نرمال استاندارد و F تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته با چگالی متقارن و λ یک عدد ثابت حقیقی است. آن‌ها توزیع‌های چوله-متقارن گوناگون را با انتخاب F به عنوان تابع توزیع‌های نرمال، t -استیودنت، لاپلاس^۲، لجستیک^۳ و یکنواخت معرفی کردند. همچنین آن‌ها برخی ویژگی‌های این خانواده از توزیع‌ها را بدست آوردند. در حقیقت نقطه‌ی شروع همه‌ی این مطالعات معرفی توزیع چوله-نرمال^۴ توسط آزالینی [۳] بوده است. یعنی،

$${}^2\phi(x)\Phi(x),$$

که در آن ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع نرمال استاندارد هستند. متغیر تصادفی Z_λ با تابع چگالی فوق به صورت $Z_\lambda \sim SN(\lambda)$ نشان داده می‌شود. آرانو-واله و همکاران [۱] یک تعمیم از توزیع آزالینی $SN(\lambda)$ را معرفی کردند. این توزیع، با نام توزیع چوله-نرمال تعمیم‌یافته شناخته می‌شود. ما و جنتون [۵] خانواده‌ای از توزیع‌های چوله-نرمال چند متغیره را به صورت زیر معرفی کردند:

$${}^2\phi_P(x)\Phi(P_k(x)),$$

که در آن ϕ_P نمایانگر تابع چگالی نرمال استاندارد P -متغیره و P_k یک چند جمله‌ای فرد از درجه‌ی k است.

توزیع چوله-نرمال انعطاف‌پذیر^۵ ما و جنتون [۵] که با نماد $FSN(\alpha, \beta)$ نمایش داده می‌شود و در آن α و β پارامترهای حقیقی ثابتی هستند، با انتخاب $k = 3$ بدست می‌آید. برای استفاده از توزیع چوله-نرمال معرفی شده توسط آزالینی [۳] در تحلیل داده‌های واقعی با محدودیت‌هایی مواجه هستیم. از جمله این که برای مقادیر بسیار بزرگ و بسیار کوچک پارامتر چولگی، توزیع چوله-نرمال به طور متناظر به مقادیر منفی و مثبت احتمال‌هایی نزدیک صفر نسبت می‌دهد. در این حالت‌ها این توزیع را تنها می‌توان برای مدل‌سازی داده‌هایی که همه مثبت یا همه منفی هستند به کار برد. آرانو-واله و همکاران [۱] برای برطرف کردن این نقطه ضعف تغییری در ساختار توزیع چوله-نرمال ایجاد نمودند. آن‌ها در واقع تعمیمی بر این توزیع ارائه کردند.

محدودیت دیگر توزیع چوله-نرمال، تک مدی بودن آن است. لذا این توزیع برای تحلیل داده‌هایی که از یک توزیع تک‌مدی پیروی می‌کنند مناسب است، در حالی که ممکن است در کاربردهای عملی تحلیل داده‌های دومی یا چندمدی مد نظر قرار بگیرند. برای رفع این محدودیت ما و جنتون [۵] تعمیمی دیگر از توزیع چوله-نرمال را ارائه نمودند.

نکوخو و همکاران [۸] با تلفیق تعمیم‌های به دست آمده توسط آرانو-واله و همکاران [۱] و ما و جنتون [۵] تعمیم دیگری از توزیع چوله-نرمال آزالینی را بدست آوردند. این تعمیم جدید از توزیع چوله-نرمال، هم برای تحلیل داده‌های تک‌مدی و دومی مناسب است و هم در حالت حدی رفتار مناسب‌تری نسبت به توزیع چوله-نرمال از خود نشان می‌دهد. آن‌ها توزیع جدید که شامل سه پارامتر

^۲Laplace

^۳Logistic

^۴Skew-Normal

^۵Flexible Skew-Normal

است را توزیع چوله-نرمال تعمیم یافته^۶ انعطاف پذیر^۶ نامیدند و از نماد $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ برای نمایش آن استفاده کردند.

در ادامه به معرفی این توزیع می پردازیم و ویژگی های آن را مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت توانایی مدل جدید در تحلیل داده های واقعی را نشان می دهیم.

۲ تعاریف و نمادها

در این قسمت تابع چگالی توزیع چوله-نرمال تعمیم یافته^۶ انعطاف پذیر را معرفی خواهیم کرد. هدف از ارائه این قسمت بررسی یک تعمیم تک/دو مدی از تابع چگالی چوله-نرمال است. مد (مدهای) این توزیع جدید با انتخاب مقادیر مختلف پارامترها قابل تغییر است. این تعمیم به صورت بالقوه برای کاربردهای عملی مناسب است. زیرا توزیع های کمتری وجود دارند که هم می توانند تک مدی و هم می توانند دو مدی باشند.

تعریف ۱.۲. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع چوله-نرمال انعطاف پذیر، با نماد $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ است، هرگاه تابع چگالی آن به شکل زیر باشد:

$$f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \gamma \phi(x) \Phi \left(\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2}{\sqrt{1 + \lambda_2 x^2}} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

به طوری که $\lambda_2 \geq 0$ و $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ مقادیر ثابت حقیقی هستند. واضح است که رابطه^۱ (۱) یک تابع چگالی احتمال است. این موضوع با استفاده از این حقیقت که تابع،

$$\gamma \Phi \left(\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2}{\sqrt{1 + \lambda_2 x^2}} \right) - 1,$$

یک تابع فرد در مجموعه اعداد حقیقی است، به وضوح

^۶Flexible Skew-Generalized Normal

مشاهده می شود. بنابراین رابطه^۱ زیر را داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma \phi(x) \Phi \left(\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2}{\sqrt{1 + \lambda_2 x^2}} \right) dx - 1 \\ = E \left[\gamma \Phi \left(\frac{\lambda_1 x + \lambda_2 x^2}{\sqrt{1 + \lambda_2 x^2}} \right) - 1 \right] = 0.$$

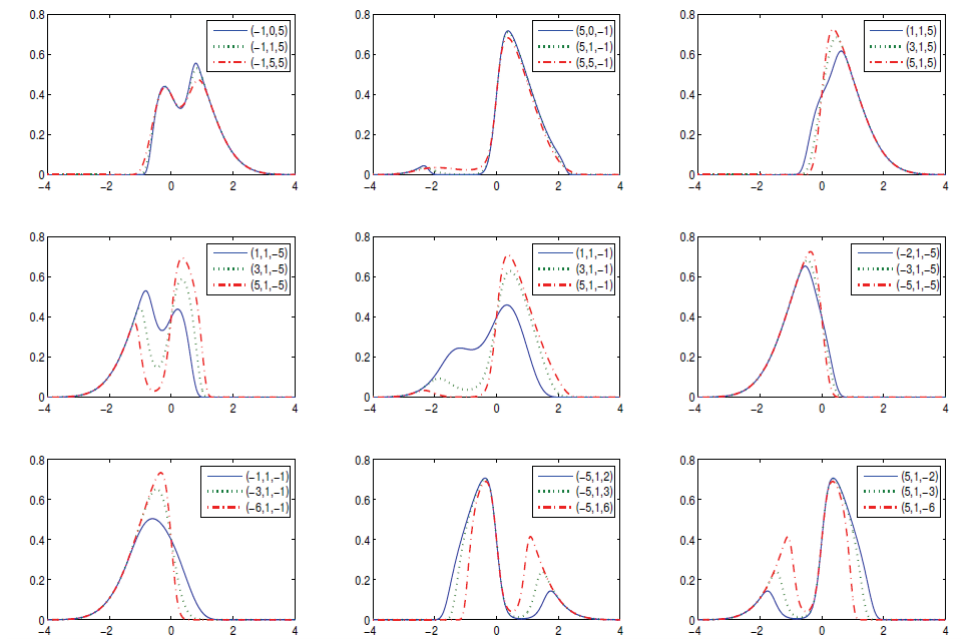
تابع توزیع چوله-نرمال ما و جنتون $FSGN(\alpha, \beta)$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$g(x) = \gamma \phi(x) \Phi (\alpha x + \beta x^2). \quad (2)$$

واضح است که این حالت تابع چگالی، حالت خاصی از تابع چگالی توزیع جدید است زمانی که پارامتر دوم یعنی λ_2 مقدار صفر را اختیار کند. نویسندگان اخیراً اثبات کردند که تابع چگالی احتمال (۲) حداکثر دو مد دارد.

برای مشاهده رفتار مدی توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ از روش های گرافیکی استفاده کردیم و مشاهده شد که مشتق تابع چگالی (۱) حداکثر یک بار از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد هرگاه $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ و حداکثر دو بار از مثبت به منفی تغییر علامت می دهد هرگاه $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

بنابراین توزیع مورد بحث قادر است به صورت دو مدی یا تک مدی در بیاید. در شکل ۱ موارد ذکر شده مشاهده می شوند. ویژگی های پایه ای یک توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ مستقیماً با استفاده از رابطه^۱ (۱) به دست می آید.



شکل ۱: تابع چگالی توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ به ازای مقادیر مختلف $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

۳ رابطه‌ی توزیع جدید با سایر

توزیع‌های مشابه

(ج) به ازای هر $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ، $\lambda_2 \geq 0$ و $x \in \mathbb{R}$ ،
 $f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + f(-x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\phi(x)$.

قضیه ۱.۳. اگر متغیر تصادفی X داری توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ باشد، نتایج زیر برقرار هستند.

(ح) به ازای هر $\lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ ،

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\phi(x)I_{\{x \geq 0\}}.$$

(الف) به ازای هر $\lambda > 0$

$$FSGN(0, \lambda, 0) = N(0, 1).$$

(خ) به ازای هر $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \infty} f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\phi(x)I_{\{x \geq 0\}}.$$

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$

$$FSGN(\lambda, 0, 0) = SN(\lambda).$$

(د) به ازای هر $\lambda_2 \geq 0$ و $\lambda_3 \leq 0$

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\phi(x)I_{\{x \leq 0\}}.$$

(پ) به ازای هر $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ و $\lambda_2 \geq 0$

$$FSGN(\lambda_1, \lambda_2, 0) = SGN(\lambda_1, \lambda_2).$$

(ذ) به ازای هر $\lambda_1 \leq 0$ و $\lambda_2 \geq 0$

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow \infty} f(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2\phi(x)I_{\{x \leq 0\}}.$$

(ت) به ازای هر $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$$FSGN(\lambda_1, 0, \lambda_3) = FSN(\lambda_1, \lambda_3).$$

۴ برآزش مدل چوله-نرمال تعمیم یافته‌ی انعطاف‌پذیر به یک مجموعه داده‌ی واقعی

(ر) اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، در این صورت برای هر تابع زوج $h(\cdot)$ داریم:

$$h(X) \stackrel{d}{=} h(Z),$$

به طوریکه $\stackrel{d}{=}$ به معنای تساوی در توزیع است.

(ز) اگر متغیر تصادفی Y دارای توزیع $FSGN(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$ باشد، در این صورت برای هر تابع زوج $h(\cdot)$ داریم:

$$h(X) \stackrel{d}{=} h(Y).$$

اضافه کردن پارامترهای مکان و مقیاس به توزیع‌های چوله، انعطاف‌پذیری آن‌ها را بیشتر می‌کند. زیرا با تغییر مقدار این پارامترها می‌توان کنترل بیشتری روی توزیع داشت. تابع چگالی چوله-نرمال تعمیم‌یافته‌ی انعطاف‌پذیر با پارامتر مکان $\mu \in \mathbb{R}$ و پارامتر مقیاس $\sigma > 0$ ، عبارت است از تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = \mu + \sigma X$ ، به طوریکه متغیر تصادفی X دارای توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ است. تابع چگالی متغیر تصادفی Y به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(y; \theta) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \times \Phi\left(\frac{\lambda_1(y-\mu) + \frac{\lambda_2}{\sigma^2}(y-\mu)^3}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda_2(y-\mu)^2}}\right) \quad (3)$$

که در آن $\theta = (\mu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ از نماد $FSGN(\mu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ برای نشان دادن این توزیع مکانی-مقیاسی استفاده می‌کنیم. واضح است زمانی که $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ ، تابع چگالی (۳) به چگالی $N(\mu, \sigma^2)$ تبدیل می‌شود. به ازای $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ، تابع چگالی (۳) با چگالی متغیر تصادفی $W = \mu + \sigma Z_{\lambda_1}$ برابر است. متغیر تصادفی $W = \mu + \sigma Z_{\lambda_1}$ دارای توزیع $SN(\mu, \sigma, \lambda_1)$ می‌شود، هرگاه متغیر تصادفی Z_{λ_1} دارای توزیع $SN(\lambda_1)$ باشد.

در این بخش مقایسه‌ای بین قابلیت مدل‌های مختلف موجود در برآزش داده‌های واقعی انجام می‌دهیم. برای این

قضیه ۲.۳. فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد و متغیر تصادفی X دارای توزیع $FSGN(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ است و همچنین فرض کنید $F(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ نشان دهنده‌ی تابع توزیع متغیر تصادفی X است، در این صورت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$F(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi(x) - 2T(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), x \in \mathbb{R},$$

که در آن

$$T(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \int_{-x}^{\infty} \int_0^{\frac{\lambda_1 u + \lambda_2 u^3}{\sqrt{1 + \lambda_2 u^2}}} \phi(u) \phi(t) dt du.$$

قضیه ۳.۳. تابع $T(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

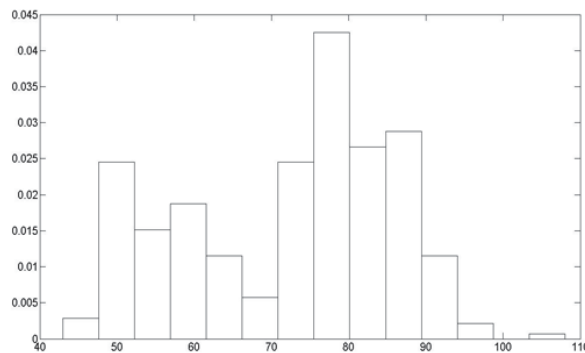
(الف) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ و $\lambda_2 \geq 0$ ،

$$T(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = T(-x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

(ب) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ و $\lambda_2 \geq 0$ ،

$$T(x; -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3) = -T(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

برای مشاهده‌ی اثبات قضایا به نکو خو و همکاران [۸] مراجعه کنید.



شکل ۲: بافت نگار داده‌های جدول ۲

که در آن‌ها f تابع چگالی مدل مورد نظر، k تعداد پارامترهای مدل f ، n تعداد داده‌ها و $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ در مدل f است. مدل مناسب مدلی با کمترین مقدار AIC و BIC است. بر این اساس به نظر می‌رسد توزیع چوله-نرمال تعمیم‌یافته‌ی انعطاف‌پذیر در بین مدل‌های موجود عملکرد مناسب‌تری دارد. همچنین شکل ۳ برآزش مدل‌های مختلف به مجموعه داده‌های جدول ۲ را نشان می‌دهد.

همان‌طور که مشاهده می‌شود مدلی که به سایر مدل‌ها ترجیح داده شده است مدل جدید است که مقادیر AIC و BIC کمتری نسبت به سایر مدل‌ها دارد (به شکل ۳ نگاه کنید).

به علاوه آزمون فرض‌های زیر می‌توانند ادعای ما را تأیید کنند:

$$\begin{aligned} \text{الف) } H_0: \lambda_2 &= o(FSN) \text{ در مقابل} \\ H_1: \lambda_2 &\neq o(FSGN) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{ب) } H_0: \lambda_3 &= o(SGN) \text{ در مقابل} \\ H_1: \lambda_3 &\neq o(FSGN) \end{aligned}$$

منظور از مجموعه داده‌ی ارائه شده در آزالینی و بوومن [۴] استفاده می‌کنیم. این مجموعه داده در ارتباط با مدت زمان (بر حسب دقیقه) انتظار فوران‌های پی در پی آب‌فشان اولد فیثفول^۶ در پارک ملی یلوستون^۷ است. داده‌ها در جدول ۲ (در پیوست موجود می‌باشد) و بافت نگار آن‌ها در شکل ۲ ارائه شده است. همان‌گونه که از بافت نگار داده‌ها مشخص است با یک مجموعه داده‌ی دو مدی مواجه هستیم.

برای مقایسه‌ی توانایی مدل چوله-نرمال تعمیم‌یافته‌ی انعطاف‌پذیر با مدل‌های موجود قبلی از جمله چوله-نرمال انعطاف‌پذیر، چوله-نرمال تعمیم‌یافته، چوله-نرمال و نرمال در برآزش این داده‌ها، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای این مدل‌ها را به دست آورده ایم. برای این منظور، به جز در توزیع نرمال، از محاسبات عددی استفاده کرده‌ایم. به عبارت دقیق‌تر با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسن در نرم افزار *MATLAB* به برآورد پارامترهای مدل‌ها پرداخته‌ایم.

برآورد ماکسیمم درستنمایی مدل‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول همان‌گونه که مشاهده می‌شود ضرایب اطلاع آکاییک^۹ و بی‌زی^{۱۰} نیز برای مقایسه‌ی بین مدل‌ها ارائه شده‌اند. این ضرایب به ترتیب عبارتند از:

$$AIC = 2k - 2 \log \left[\prod_{i=1}^n f(x_i; \hat{\theta}) \right],$$

$$BIC = k \log n - 2 \log \left[\prod_{i=1}^n f(x_i; \hat{\theta}) \right],$$

^۶Old Faithful

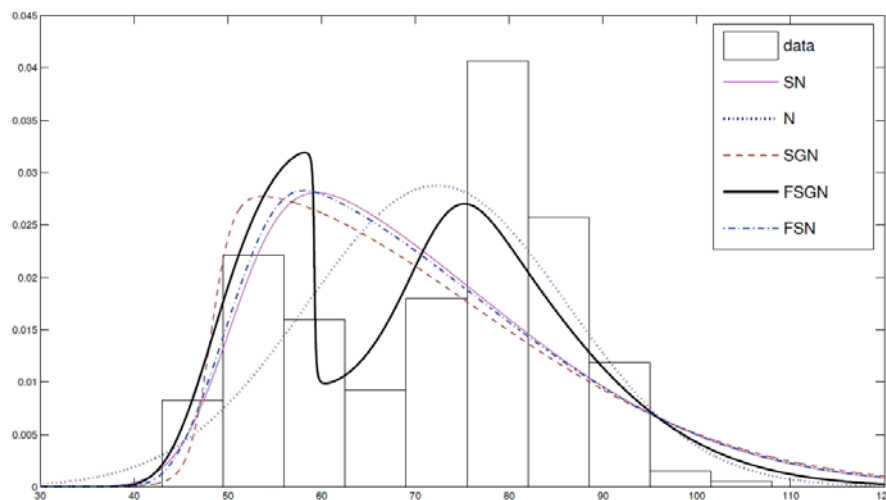
^۷Yellowstone

^۹Akaike information criterion

^{۱۰}Baysian information criterion

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل‌های مختلف برای داده‌های مدت زمان انتظار فوران‌های آب‌فشان

توزیع	N	SN	SGN	FSN	$FSGN$
$\hat{\mu}$	۷۲/۳۱۴۴	۵۰/۳۲۹۹	۴۸/۱۶۴۰	۴۹/۷۷۷۷	۵۹/۲۳۳۲
$\hat{\sigma}$	۱۳/۸۶۷۱	۲۵/۹۹۲۵	۲۷/۸۴۸۴	۲۶/۴۶۱۲	۱۹/۰۶۳۳
$\hat{\lambda}_1$	-	۵/۴۶۷۹	۱۴/۹۶۴۴	۵/۹۷۰۹	-۷۲/۶۷۰۹
$\hat{\lambda}_2$	-	-	۱۹/۴۱۷۷	-	۹۶۶۳/۱۷۷۲
$\hat{\lambda}_3$	-	-	-	۱۰/۳۴۳۱	۲۹۷/۲۶۷۲
AIC	۲۴۲۴/۹۷۶۷	۲۴۷۰/۱۸۸۶	۲۴۷۰/۳۰۰۷	۲۴۷۱/۹۰۳۵	۲۳۸۵/۵۵۷۷
BIC	۲۴۳۲/۳۷۷۵	۲۴۸۱/۲۸۹۹	۲۴۸۵/۱۰۲۴	۲۴۸۶/۷۰۵۳	۲۴۰۴/۰۵۹۹



شکل ۳: مدل‌های برازش‌یافته به داده‌های جدول ۲

مقدار آماره‌ی آزمون نسبت درست‌نمایی فرضیه‌ی الف و ب به ترتیب مقادیر ۳۵/۸۸ و ۷۴/۸۶ هستند. در حالی که مقدار متناظر با آن در حدود صفر است. بنابراین فرض صفر در راستای پذیرش فرض مقابل رد می‌شود. این تعمیم جدید از توزیع چوله-نرمال هم برای تحلیل داده‌های تک‌مدی و دومدی مناسب است و هم در حالت حدی رفتار مناسب‌تری نسبت به توزیع چوله-نرمال از خود نشان می‌دهد. همچنین در نهایت توانایی مدل جدید در برازش داده‌های واقعی را آشکار نمودیم.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله تعمیم جدیدی از توزیع چوله-نرمال آزالینی ارائه و برخی از خواص توزیعی مهم آن را مطرح نمودیم.

مراجع

- [7] Nekoukhou, V. and Alamatsaz, M. H. (2011). A family of skew-symmetric Laplace distributions. *Statistical Papers, Reliability; R-30*, 87-89.
- [8] Nekoukhou, V., Alamatsaz, M. H. and Aghajani A. H. (2013). A flexible skew-generalized Normal distribution. *Communications in Statistics – Theory and Methods, Reliability; R-30*, 87-89.
- [1] Arellano-Valle, R. B., Gomez, H. W. and Quintana, F. A. (2004). A new class of skew-Normal distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 33, 1465-1480.
- [2] Arnold, B. C. and Lin, G. D. (2004). Characterization of the skew-Normal and generalized Chi distributions. *Sankhyā*, 66, 593-606.
- [3] Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the Normal ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, 12, 171-178.
- [4] Azzalini, A. and Bowman, A. W. (1990). A look at some data on the old faithful geyser. *Applied Statistics*, 39, 357-365.
- [5] Ma, Y. and Genton, M. G. (2004). Flexible class of skew-symmetric distributions. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31, 459-468.
- [6] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003). Skew distributions generated by the Normal kernel. *Statistics and Probability Letters*, 65, 269-277.

۶ پیوست

جدول ۲ در ادامه ارائه شده است.

جدول ۲: مدت زمان (بر حسب دقیقه) انتظار فوران‌های پی در پی آب‌فشان اولد فیتشفول در پارک ملی یلوستون

۸۱/۰۰	۵۰/۰۰	۸۰/۰۰	۷۱/۰۰	۵۷/۰۰	۸۰/۰۰	۷۵/۰۰	۷۷/۰۰
۹۰/۰۰	۷۳/۰۰	۶۰/۰۰	۸۳/۰۰	۶۰/۰۰	۸۶/۰۰	۷۷/۰۰	۵۶/۰۰
۶۵/۰۰	۸۲/۰۰	۸۴/۰۰	۵۴/۰۰	۸۵/۰۰	۵۸/۰۰	۸۹/۰۰	۵۴/۰۰
۷۶/۰۰	۵۸/۰۰	۷۹/۰۰	۵۷/۰۰	۸۸/۰۰	۶۸/۰۰	۷۶/۰۰	۷۸/۰۰
۸۷/۰۰	۴۸/۰۰	۹۳/۰۰	۵۴/۰۰	۷۴/۰۰	۸۵/۰۰	۷۵/۰۰	۶۵/۰۰
۸۶/۰۰	۵۳/۰۰	۷۸/۰۰	۵۲/۰۰	۸۳/۰۰	۶۰/۰۰	۹۱/۰۰	۵۰/۰۰
۷۴/۰۰	۷۱/۰۰	۸۷/۰۰	۴۹/۰۰	۸۰/۰۰	۶۰/۰۰	۹۲/۰۰	۴۳/۰۰
۷۷/۰۰	۵۷/۰۰	۸۰/۰۰	۶۱/۰۰	۸۹/۰۰	۶۰/۰۰	۸۴/۰۰	۶۹/۰۰
۸۲/۰۰	۴۸/۰۰	۸۱/۰۰	۷۳/۰۰	۶۲/۰۰	۷۹/۰۰	۱۰۸/۰۰	۵۰/۰۰
۵۹/۰۰	۸۱/۰۰	۵۴/۰۰	۸۰/۰۰	۷۳/۰۰	۸۱/۰۰	۶۲/۰۰	۸۱/۰۰
۵۳/۰۰	۸۰/۰۰	۵۰/۰۰	۸۷/۰۰	۷۱/۰۰	۷۹/۰۰	۸۱/۰۰	۷۴/۰۰
۵۱/۰۰	۸۲/۰۰	۵۸/۰۰	۸۱/۰۰	۴۹/۰۰	۹۲/۰۰	۶۶/۰۰	۸۷/۰۰
۵۲/۰۰	۸۸/۰۰	۵۰/۰۰	۸۸/۰۰	۶۲/۰۰	۹۳/۰۰	۵۶/۰۰	۸۹/۰۰
۶۹/۰۰	۷۵/۰۰	۷۷/۰۰	۵۳/۰۰	۵۱/۰۰	۷۹/۰۰	۵۸/۰۰	۸۲/۰۰
۸۰/۰۰	۵۵/۰۰	۸۷/۰۰	۵۳/۰۰	۸۵/۰۰	۶۱/۰۰	۵۲/۰۰	۷۸/۰۰
۷۶/۰۰	۹۴/۰۰	۹۳/۰۰	۵۴/۰۰	۷۶/۰۰	۸۰/۰۰	۸۱/۰۰	۵۹/۰۰
۸۳/۰۰	۸۲/۰۰	۷۲/۰۰	۷۷/۰۰	۸۶/۰۰	۷۸/۰۰	۷۱/۰۰	۷۷/۰۰
۷۵/۰۰	۶۵/۰۰	۷۹/۰۰	۷۲/۰۰	۷۸/۰۰	۷۷/۰۰	۷۵/۰۰	۵۰/۰۰
۹۶/۰۰	۵۰/۰۰	۷۹/۰۰	۷۵/۰۰	۷۸/۰۰	۶۴/۰۰	۸۰/۰۰	۴۹/۰۰
۸۱/۰۰	۷۲/۰۰	۷۵/۰۰	۷۸/۰۰	۸۸/۰۰	۵۴/۰۰	۸۵/۰۰	۵۱/۰۰
۸۷/۰۰	۶۹/۰۰	۵۵/۰۰	۸۳/۰۰	۴۹/۰۰	۸۲/۰۰	۸۰/۰۰	۷۸/۰۰
۶۲/۰۰	۸۷/۰۰	۵۷/۰۰	۸۴/۰۰	۵۷/۰۰	۸۴/۰۰	۷۳/۰۰	۷۸/۰۰
۹۸/۰۰	۴۸/۰۰	۷۸/۰۰	۷۹/۰۰	۵۷/۰۰	۷۹/۰۰	۵۷/۰۰	۹۰/۰۰
۶۵/۰۰	۸۴/۰۰	۵۰/۰۰	۸۳/۰۰	۶۰/۰۰	۸۰/۰۰	۷۸/۰۰	۵۲/۰۰
۵۱/۰۰	۷۸/۰۰	۵۰/۰۰	۸۸/۰۰	۵۰/۰۰	۸۴/۰۰	۷۴/۰۰	۷۶/۰۰
۷۵/۰۰	۷۷/۰۰	۶۹/۰۰	۹۲/۰۰	۶۵/۰۰	۸۹/۰۰	۴۹/۰۰	۸۸/۰۰
۶۸/۰۰	۸۷/۰۰	۶۱/۰۰	۸۱/۰۰	۵۵/۰۰	۹۳/۰۰	۸۵/۰۰	۶۵/۰۰
۸۲/۰۰	۷۴/۰۰	۵۳/۰۰	۸۴/۰۰	۷۰/۰۰	۷۳/۰۰	۹۳/۰۰	۵۰/۰۰
۹۱/۰۰	۵۳/۰۰	۸۶/۰۰	۴۹/۰۰	۸۷/۰۰	۷۷/۰۰	۷۴/۰۰	۷۲/۰۰
۷۹/۰۰	۸۹/۰۰	۸۷/۰۰	۷۶/۰۰	۵۹/۰۰	۸۰/۰۰	۸۰/۰۰	۴۹/۰۰
۸۷/۰۰	۷۲/۰۰	۸۹/۰۰	۴۵/۰۰	۹۳/۰۰	۷۲/۰۰	۷۱/۰۰	۵۴/۰۰
۸۴/۰۰	۵۷/۰۰	۸۷/۰۰	۶۸/۰۰	۷۴/۰۰	۶۵/۰۰	۷۸/۰۰	۵۷/۰۰
۸۶/۰۰	۷۵/۰۰	۷۳/۰۰	۵۳/۰۰	۸۲/۰۰	۹۳/۰۰	۸۴/۰۰	۴۷/۰۰
۵۰/۰۰	۸۵/۰۰	۷۷/۰۰	۵۴/۰۰	۹۶/۰۰	۴۸/۰۰	۸۹/۰۰	۶۳/۰۰
۸۱/۰۰	۷۸/۰۰	۷۶/۰۰	۷۴/۰۰	۸۴/۰۰	۷۶/۰۰	۶۲/۰۰	۸۳/۰۰
۸۱/۰۰	۶۶/۰۰	۸۴/۰۰	۴۸/۰۰	۹۳/۰۰	۴۷/۰۰	۷۸/۰۰	۷۸/۰۰
۸۸/۰۰	۷۹/۰۰	۸۷/۰۰	۵۱/۰۰	۷۸/۰۰	۵۴/۰۰	۸۷/۰۰	۵۲/۰۰
۸۵/۰۰	۵۸/۰۰						