

طراحی اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} با رویکرد زنجیرهای مارکف

اصغر سیف، רוژین رحیمی، ساجده کلانتر
گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینای همدان

چکیده

نمودارهای کنترل معمولاً فقط بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. این درحالیست که طراحی یک نمودار کنترل می‌تواند عواقب اقتصادی متعددی به همراه داشته باشد، چرا که هزینه‌های نمونه‌گیری و آزمایش، هزینه‌های بررسی هشدارهای خروج از کنترل و رفع انحراف با دلیل همگی به انتخاب مناسب پارامترهای نمودار کنترل بستگی دارند. به همین منظور در این مقاله نمودار کنترل \bar{X} با دیدگاه اقتصادی بناسازی شده است. برای بناسازی این نمودار کنترل، از روابط و قضایای مربوط به احتمال جذب و متوسط تعداد مراحل جذب در زنجیرهای مارکف استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل کیفیت، زنجیر مارکف، الگوریتم ژنتیک (GA)، نمودار کنترل \bar{X} ، طراحی اقتصادی.

۱ مقدمه

تولید در فرایند است. نمودارهای کنترل که از ابزار کنترل آماری فرایند هستند، تغییرپذیری توزیع یک یا چند مشخصه‌ی کیفیت را ثبت می‌کنند و تصویری از فرایند در طول زمان در رابطه با آن مشخصه (ها)ی کیفیت ارائه می‌دهند. در این ارتباط، نمودارهای کنترل کاربرد وسیعی در برقراری و حفظ کنترل آماری فرایند دارند. این نمودارها، ابزار مؤثری برای برآورد پارامترهای فرایند، به خصوص در مطالعه‌ی کارایی فرایند محسوب می‌شوند. در

امروزه کنترل و بهبود کیفیت در اغلب بنگاه‌های اقتصادی بزرگ و کوچک، راهبردی مهم و اساسی است. در این میان کنترل آماری فرایند ^۱ SPC، مجموعه‌ای قدرتمند و توانا در ایجاد ثبات در فرایند و بهبود کارایی آن از طریق کاهش تغییرپذیری است. در واقع SPC، روش مؤثری برای بهبود کیفیت محصول و صرفه‌جویی در هزینه‌ی

^۱ Statistical Process Control

دهه‌ی ۱۹۲۰، شوهارت اولین نمودار کنترل برای پایش فرایند را ارائه داد. بعدها این نمودار توسعه یافت و به طور گسترده به عنوان ابزار مهمی در کنترل آماری فرایند مورد استفاده قرار گرفت. وظیفه‌ی اصلی نمودارهای کنترل، کشف رخداد انحراف‌های با دلایلی است که موجب تغییر معناداری در پارامترهای توزیع فرایند می‌شوند. بنابراین با استفاده از این ابزار می‌توان اصلاح‌های لازم را قبل از تولید تعداد زیادی محصول نامنطبق انجام داد.

در صنعت، نمودارهای کنترل معمولاً فقط بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. در این روش اندازه نمونه و حدود کنترل به گونه‌ای انتخاب می‌شوند تا قدرت آزمون جهت پی بردن به وجود یک تغییر خاص در مشخصه کیفی و همچنین احتمال خطای نوع اول مقادیر خاصی باشند. در واقع در این نوع طراحی، ویژگی‌های آماری مانند خطاهای نوع I و II و متوسط طول اجرا، ARL^2 کنترل می‌شوند. این درحالیست که طراحی یک نمودار کنترل، عواقب اقتصادی متعددی به همراه دارد. به همین منظور منطقی به نظر می‌رسد که نمودارهای کنترل با دیدگاه اقتصادی طراحی شوند. به طور کلی مدل‌های اقتصادی با استفاده از یک تابع هزینه‌ی کل و رابطه‌ی بین پارامترهای طراحی نمودار کنترل و سه نوع هزینه‌ی نمونه‌گیری و آزمایش، هزینه‌ی بررسی یک هشدار خارج از کنترل و تصحیح فرایند و هزینه‌ی تولید محصول نامنطبق، فرمول‌بندی می‌شوند. مأموریت ذاتی نمودار کنترل \bar{X} کشف تغییر میانگین فرایند تولید به واسطه‌ی وقوع انحراف‌های با دلیل است. این در حالیست که، هدف از طراحی اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} ، تعیین پارامترهای سه‌گانه (h, k, n) ، یعنی اندازه نمونه، حدود کنترل و فاصله‌ی نمونه‌گیری است به طوری که،

هزینه مورد انتظار بر واحد زمان می‌نیم شود. پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه‌ی طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل انجام شده است. الکساندر و همکاران [۱] مدل هزینه‌ی دانکن با یک انحراف با دلیل همراه با تابع زیان تاگوچی را توسعه دادند. به منظور توسعه‌ی مطالعه‌ی الکساندر و همکاران [۱]، چو و همکاران [۵]، از توزیع بر^۳ برای به دست آوردن طراحی می‌نیم زیان آماری نمودارهای کنترل برای داده‌های غیر نرمال استفاده کردند. در مدل آن‌ها، تابع زیان الکساندر و همکاران [۱]، به عنوان تابع هدفی که باید می‌نیم شود و تابع توزیع تجمعی بر برای توزیع‌های غیر نرمال مختلف، به کار برده شد. آن‌ها از طریق تحلیل حساسیت دریافتند که مقادیر کوچک ضریب چولگی هیچ اثر معناداری در طراحی بهینه ندارد. با این حال، هنگامی که ضریب چولگی افزایش می‌یابد، افزایش ناچیزی در n ، h و k رخ می‌دهد، در حالی که افزایش ضریب کشیدگی موجب افزایش n و h می‌شود. در مطالعه‌ی دیگر، چو و همکاران [۶]، طراحی آماری-اقتصادی نمودار \bar{X} را برای داده‌های غیر نرمال، با بکارگیری توزیع بر، توسعه دادند. در این مطالعه، اثر عدم نرمال بودن توزیع مشخصه کیفی در طراحی بهینه-ی نمودارهای کنترل مورد بررسی قرار گرفت.

کاستیلو و مونتگومری [۳]، یک مدل اقتصادی برای به دست آوردن پارامترهای طراحی بهینه‌ی نمودارهای کنترل در پایش آماری فرایندهای کوتاه مدت و بلند مدت، ارائه دادند. پارخیدک و پارخیده [۱۶]، مدل دانکنی که در آن حدود کنترل از قبل ثابت نبوده بلکه توسط بهینه‌سازی اقتصادی تعیین می‌شود را گسترش دادند. آن‌ها با یک مثال نشان دادند که استفاده از این مدل در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل، می‌تواند به

^۳Burr Distribution^۲Average Run Length

صرفه‌جویی چشمگیری در هزینه و کاهش هشدارهای غلط منجر شود. کوستا و رحیم [۹] از توزیع وایبل برای مدل‌بندی زمان رخداد انحراف‌های با دلیل در طراحی اقتصادی نمودار کنترل استفاده کردند. آن‌ها مدل هزینه‌ی دانکن را برای طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل با طرح نمونه‌گیری متغیر توسعه داده و دریافتند که استفاده از مکانیزم شکست نمایی در فرایندهای فرسایشی جریه‌های اقتصادی سنگینی به همراه خواهد داشت. چو و همکاران [۷]، مدل اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} را برای داده‌های همبسته گسترش داده و مدل دانکن با یک انحراف با دلیل را به عنوان تابع هدف و مدل همبستگی یانگ و هانکوک [۱۸] را برای به دست آوردن احتمال‌های خطای نمودار کنترل به کار بردند. آن‌ها از تحلیل خود دریافتند که داده‌های با همبستگی مثبت و بالا n ، h و k کوچک‌تری را می‌طلبد و در غیر این صورت یعنی داده‌هایی با همبستگی منفی و بالا، منجر به n و k کوچک‌تری خواهد شد.

اقتصادی نمودارهای کنترل تطبیقی، دسترسی به برخی از معیارهای آماری یا اقتصادی (مانند متوسط زمان لازم جهت صدور یک هشدار صحیح از لحظه وقوع انحراف با دلیل)، بدلیل پیچیده شدن روابط مربوطه با مشکل مواجه می‌شود. یکی از راهکارهای غلبه بر این مشکل استفاده از روابط و قضایای متوسط تعداد مراحل جذب در زنجیرهای مارکف است. برای مثال می‌توان به مطالعات صورت گرفته توسط هو^۴ و همکاران [۱۴]، تو^۵ و همکاران [۱۷]، دی ماگال هائیس و ون دولینگر [۱۱]، چن [۴] و دی ماگال هائیس و همکاران [۱۰] اشاره کرد. در تمامی مطالعه‌های فوق رویکرد مارکفی برای نمودارهای کنترل تطبیقی توضیح داده می‌شود و معمولا به چگونگی استفاده از این روابط در حالت ساده‌تر آن یعنی بناسازی نمودارهای کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت (اندازه نمونه، فاصله نمونه‌گیری و حدود کنترل ثابت) اشاره‌ای نمی‌شود. به همین منظور در این مقاله طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل با نرخ نمونه‌گیری ثابت، با رویکرد مارکفی ارایه خواهد شد.

ساختار این مقاله در ادامه به شرح زیر است:

یکی از راهکارهای مؤثر جهت افزایش توان نمودارهای کنترل در کشف انحراف‌های کوچک تا متوسط، استفاده از نمودارهای کنترل تطبیقی است. در این گونه از نمودارها، اندازه نمونه، فاصله نمونه‌گیری و یا حدود کنترل، بسته به اینکه نمونه قبلی در ناحیه هشدار قرار دارد یا خیر، متغیر فرض می‌شود. به عنوان مثال کوستا و رحیم [۹]، با فرض متغیر بودن تمامی پارامترهای نمودار کنترل، نمودار کنترلی را طراحی کردند که سرعت کشف تغییرات کوچک تا متوسط را نسبت به نمودارهای کنترل معمول، یعنی نمودارهایی با نرخ نمونه‌گیری ثابت، به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش داد.

در بخش دوم نمودار کنترل \bar{X} با استفاده از مفاهیم زنجیر مارکف طراحی می‌شود. در بخش سوم مدل هزینه و پارامترهای مربوطه معرفی می‌شود. در بخش چهارم، جهت بیان کاربرد صنعتی طراحی اقتصادی نمودار کنترل، مثالی ارایه و حل خواهد شد و بالاخره، آخرین بخش به ارایه نتایج کلی اختصاص خواهد داشت.

این درحالیست که، در طراحی‌های آماری و آماری-

^۴Hu

^۵Teoh

۲ نمودار کنترل \bar{X} با رویکرد مارکفی

استفاده در این قسمت، خواننده را به سینلار [۸]، ارجاع می‌دهیم. زنجیر مارکفی را با فضای حالت متناهی $E = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ و ماتریس احتمال انتقال P در نظر بگیرید.

چنانچه $A = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ ، مجموعه جاذب و $B = \{m+1, \dots, N\}$ مجموعه حالت‌های غیر جاذب باشد، ماتریس احتمال انتقال زنجیر را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ R & Q \end{pmatrix},$$

به قسمی که I ماتریس همانی $m \times m$ و $\mathbf{0}$ ماتریس صفر با مرتبه $m \times (N - m)$ و درایه‌های ماتریس R ، احتمال انتقال یک مرحله‌ای از حالت‌های غیر جاذب به جاذب، و درایه‌های ماتریس Q احتمال‌های انتقال یک مرحله‌ای بین حالت‌های غیر جاذب است.

فرض کنید U یک ماتریس $(N - m) \times m$ باشد، به طوری که درایه‌های آن، احتمال‌های جذب از حالت‌های غیر جاذب مختلف زنجیر را نشان دهد. به عبارت دیگر:

$$u_{ij} = P(X_n = j(\in A) | X_0 = i(\in B)).$$

می‌توان نشان داد:

$$U = (I - Q)^{-1}R.$$

ماتریس $\emptyset = (I - Q)^{-1}$ را ماتریس اساسی زنجیر مارکف می‌نامند. با استفاده از درایه‌های این ماتریس می‌توان متوسط زمان جذب از یک حالت غیر جاذب را محاسبه کرد. در ادامه، ابتدا نمودار کنترل را در غالب یک زنجیر مارکف معرفی و سپس با استفاده از ماتریس اساسی \emptyset معیارهای آماری مورد استفاده در طراحی

در نمودارهای کنترل، فرایند بوسیله یک حالت تحت کنترل μ_0 توصیف می‌شود و یک انحراف با دلیل به اندازه δ که به صورت تصادفی رخ می‌دهد باعث می‌شود تا میانگین از μ_0 به $\mu_0 \pm \delta\sigma$ تغییر کند. نمودار کنترل با خط مرکز μ_0 و حدود کنترل بالا و پایین $\mu_0 \pm k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ بناسازی می‌شود. نمونه‌ها در فاصله h ساعت از یکدیگر انتخاب شده و هنگامی که نقطه‌ای، خارج از حدود کنترل رسم شود، جستجو برای شناسایی انحراف با دلیل آغاز می‌شود. در رسم این نمودار، پارامترهای μ_0 و δ و σ معلوم فرض می‌شوند در حالی که پارامترهای نمودار کنترل، n و k و h باید تعیین شوند. در ادبیات موضوع مرسوم‌ترین معیار مورد استفاده برای مقایسه طرح‌های کنترل با استراتژی‌های مختلف، معیار $AATS$ ^۶ (متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار) می‌باشد.

$$AATS = ATC - (\text{متوسط زمان تحت کنترل}),$$

به قسمی که ATC (متوسط زمان چرخه) برابر با متوسط زمان بروز اولین هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند از زمان شروع فرایند است. چنانچه زمان وقوع یک انحراف با دلیل متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر λ باشد آن‌گاه متوسط زمانی که فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند برابر با $\frac{1}{\lambda}$ خواهد بود. یکی از روش‌های مفید برای محاسبه ATC ^۷ استفاده از مفاهیم زنجیرهای مارکف است. برای توضیح بیشتر در ارتباط با روش‌های مورد

^۶Adjusted Average Time to Signal

^۷Average Time of Cycle

اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} را محاسبه خواهیم کرد.
در نمودار کنترل \bar{X} هر بار که از فرایند نمونه‌گیری می‌شود، یکی از حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

$$(1) |Y| \leq k \text{ و فرایند تحت کنترل است } (\delta = 0).$$

$$(2) |Y| > k \text{ و فرایند تحت کنترل است (هشدار غلط, } \delta = 0).$$

$$(3) |Y| \leq k \text{ و فرایند خارج از کنترل است } (\delta \neq 0).$$

$$(4) |Y| > k \text{ و فرایند خارج از کنترل است } (\delta \neq 0).$$

به طوری که :

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

زمانی که $|Y| > k$ باشد، نمودار کنترل هشدار می‌دهد مبنی بر خارج کنترل بودن فرایند اعلام می‌دارد. واضح است چنانچه فرایند تحت کنترل باشد این هشدار یک زنگ خطر اشتباهی (حالت ۲) و چنانچه فرایند خارج از کنترل باشد، هشدار اعلام شده یک هشدار صحیح است. بنابراین حالت ۴ را می‌توان حالت جاذب در زنجیرهای مارکف نامید. برای یک زنجیر مارکف با حالت‌های گذرای فوق، ماتریس احتمال انتقال به قرار زیر است:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ \circ & \circ & p_{33} & p_{34} \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix},$$

که در آن p_{ij} بیانگر احتمال شرطی تغییر وضعیت از حالت قبلی i به حالت فعلی j است. چنانچه $\Phi(\cdot)$ نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد باشد به طوری که:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma,$$

آنگاه :

$$p_{11} = (\Phi(k) - \Phi(-k)) \times e^{-\lambda h},$$

$$p_{12} = 2\Phi(-k) \times e^{-\lambda h},$$

$$p_{13} = p_{\mu=\mu_1}(|Y| \leq k) \times (1 - e^{-\lambda h}) \\ = (\Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k + \delta\sqrt{n})) \\ \times (1 - e^{-\lambda h}),$$

$$p_{14} = 2\Phi(-k + \delta\sqrt{n}) \times (1 - e^{-\lambda h}),$$

$$p_{21} = p_{11},$$

$$p_{22} = p_{12},$$

$$p_{23} = p_{13},$$

$$p_{24} = p_{14},$$

$$p_{33} = (\Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k + \delta\sqrt{n})),$$

$$p_{34} = 2\Phi(-k - \delta\sqrt{n}).$$

ضمناً فرض بر این است که فرایند خود اصلاح نیست، به همین دلیل امکان انتقال از حالت خارج از کنترل به حالت تحت کنترل وجود نداشته و درایه‌های مربوطه در ماتریس احتمال انتقال برابر با صفر خواهد بود. با توجه به مفاهیم زنجیر مارکف داریم:

$$ATC = b'(I - Q)^{-1}h,$$

به قسمی که $h = (h, h, h)'$ بردار فاصله‌ی نمونه‌گیری، Q یک ماتریس 3×3 با حذف سطر و ستون حالت

جاذب ماتریس احتمال انتقال P ، I ماتریس واحد از مرتبه ۳ و $b = (p_1, p_2, p_3)'$ بردار احتمال آغازین با شرط $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ می‌باشد. از آنجا که در آغاز هر فرایندی مهندس کیفیت از تحت کنترل بودن فرایند اطمینان حاصل می‌کند، لذا فرض می‌شود که فرایند از حالت اول شروع به فعالیت می‌کند. به عبارت دیگر $b = (1, 0, 0)'$ فرض می‌شود.

۱.۳ پذیره‌های مدل هزینه

جهت بناسازی مدل هزینه برای نمودار کنترل \bar{X} پذیره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

- یک انحراف با دلیل باعث تغییر میانگین فرایند (μ_0) به اندازه δ می‌شود ($\mu_0 + \delta\sigma$).
- هنگامی که یک نقطه، خارج حدود کنترل واقع می‌شود وجود یک انحراف با دلیل هشدار داده می‌شود.
- فرض می‌شود که انحراف با دلیل براساس یک فرایند پواسون با میزان متوسط λ مشاهده در ساعت رخ می‌دهد. به عبارت دیگر با فرض این که فرایند در حالت تحت کنترل شروع به کار می‌کند، مدت زمانی که فرایند در حالت تحت کنترل باقی می‌ماند یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ ساعت خواهد بود.
- هزینه حذف یک انحراف با دلیل و تعمیر (یا تنظیم) فرایند از درآمد خالص کسر نمی‌شود.
- مشخصه‌ی کیفیت دارای توزیع نرمال است.

۲.۳ تابع هزینه

در این بخش از مدل هزینه لورنزن و وانس [۱۵]، استفاده می‌شود. این مدل، سه هزینه‌ی مختلف را در نظر می‌گیرد؛

همان‌گونه که قبلاً متذکر شدیم، در صنعت، نمودارهای کنترل معمولاً فقط بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. در این رویکرد، پارامترهای نمودار کنترل یعنی اندازه‌ی نمونه، فاصله‌ی نمونه‌گیری و حدود کنترل به گونه‌ای تعیین می‌شوند، تا توان آزمون جهت پی بردن به وجود یک تغییر خاص در مشخصه کیفی $(1 - \beta)$ و همچنین احتمال خطای نوع اول (α) مقادیر خاصی باشند. این درحالیست که طراحی یک نمودار کنترل، عواقب اقتصادی متعددی به همراه خواهد داشت. به همین منظور در بخش بعد با معرفی یک مدل هزینه مناسب، نمودارهای کنترل با دیدگاه اقتصادی طراحی می‌شوند.

۳ مدل هزینه

جهت طراحی یک نمودار کنترل با دیدگاه اقتصادی چرخه‌ی کیفی در فرایند SPC به چهار مرحله زیر تقسیم می‌شود:

- (۱) زمان تحت کنترل،
- (۲) زمان خارج از کنترل تا صدور هشدار،
- (۳) زمان اخذ، بررسی و تفسیر نمونه خارج از کنترل،
- (۴) زمان جستجو و حذف انحرافات با دلیل.

هزینه‌ی تولید در شرایط تحت کنترل و خارج از کنترل، به خواص زنجیره‌های مارکف برابر خواهد بود با:

$$ANF = b'(I - Q)^{-1} f,$$

به قسمی که: $f = (0, 1, 0)'$

فرض کنید زمان لازم برای تفسیر نمونه متناسب با اندازه‌ی نمونه باشد (ثابت تناسب را E در نظر می‌گیریم). در این صورت زمان صرف شده برای تفسیر نمونه برابر با nE خواهد بود.

T_0 : متوسط زمان صرف شده برای بررسی یک هشدار غلط.

T_1 : زمان مورد انتظار برای کشف انحراف با دلیل.

T_2 : زمان مورد انتظار برای اصلاح انحراف با دلیل.

γ_1 : برابر با صفر است چنانچه فرایند جستجو برای یافتن انحراف با دلیل متوقف شود و در غیر این صورت برابر با یک خواهد بود.

γ_2 : برابر با صفر است چنانچه فرایند طی تصحیح و تعمیر انحراف با دلیل متوقف شود و در غیر این صورت برابر با یک خواهد بود.

C_0 : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق است مادامی که فرایند تحت کنترل است.

C_1 : هزینه‌ی تولید محصول‌های نامنطبق است مادامی که فرایند خارج از کنترل است.

a_4 : هزینه‌ی بررسی هشدارهای اشتباه.

a_3 : هزینه‌ی تعیین محل، تعمیر و اصلاح انحرافات بادلیل.

a_1, a_2 : هزینه‌های ثابت و متغیر نمونه‌گیری.

چنانچه ANS و ANI ، بیانگر متوسط تعداد اقلام بازرسی شده و نمونه‌ی اخذ شده در یک چرخه‌ی کیفیت

اصلاح و تعمیر فرایند. روش رایج در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل می‌نیم‌سازی هزینه‌ی مورد انتظار در واحد زمان است. به همین منظور باید هزینه‌ی مورد انتظار را در یک چرخه، بر زمان مورد انتظار چرخه تقسیم کرد و سپس نتیجه‌ی حاصله را می‌نیم کرد. بنابر فرایند تجدید پاداش هزینه‌ی مورد انتظار در هر ساعت برابر خواهد بود با:

$$E(A) = \frac{E(C)}{E(T)}, \quad (1)$$

به قسمی که:

$$E(C) = \frac{C_0}{\lambda} + C_1 \times [AATS + nE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2] + a_4 ANF + a_3 + (a_1 ANS + a_2 ANI) + \frac{(a_1 + a_2 n)(nE + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2)}{h}, \quad (2)$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + (1 - \gamma_1) T_0 ANF + AATS + nE + T_1 + T_2 = ATC + (1 - \gamma_1) T_0 ANF + nE + T_1 + T_2. \quad (3)$$

نمادهای بکار رفته در معادله‌های (۲) و (۳) به شرح زیر هستند:

$AATS$ ، متوسط زمان تعدیل شده تا بروز هشدار بعد از تغییر در میانگین فرایند خواهد بود، که برابر است با:

$$AATS = ATC - \frac{1}{\lambda}.$$

ANF ، متوسط تعداد هشدارهای غلط است که با توجه

تا صدور هشدار باشند آن‌گاه:

$$ANI = b'(I - Q)^{-1}n,$$

$$ANS = b'(I - Q)^{-1}1,$$

به قسمی که، $n = (n, n, n)'$ و $1 = (1, 1, 1)'$.

۴ الگوریتم ژنتیک و طراحی اقتصادی نمودار کنترل \bar{X}

در طراحی اقتصادی نمودار \bar{X} هدف یافتن مقادیر پارامترهای نمودار کنترل (n, k, h) است، به قسمی که معادله (۱)، می‌نیم شود. در چنین وضعیتی پارامترهای فرایند $(\lambda, \delta, T_0, T_1, T_2, \gamma_1, \gamma_2, E)$ و پارامترهای هزینه $(C_0, C_1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ معلوم فرض می‌شوند. اندازه نمونه n مقادیری گسسته و دیگر پارامترهای نمودار همواره مقادیری پیوسته اختیار می‌کنند. با در نظر گرفتن شرایط واقعی در یک فرایند تولید، حداکثر مقدار فاصله‌ی نمونه‌گیری ۸ ساعت در نظر گرفته می‌شود ($h \leq 8$). بنابراین مسأله‌ی بهینه‌سازی به صورت زیر خواهد بود:

$$\min E(A),$$

$$0 < 1 \leq h \leq 8,$$

$$k > 0,$$

$$n \in z^+.$$

مسأله بهینه‌سازی فوق، دارای متغیرهای تصمیم گسسته و پیوسته و فضای پاسخ نامحدب است. از آن‌رو حل این مدل با استفاده از روش‌های بهینه‌کاوای کلاسیک مقدور نمی‌باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش جستجوی

فرا ابتکاری است که توسط هلند [۱۳] معرفی گردید. از آن زمان تا کنون این الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌های فرا ابتکاری دیگر بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی تابع هدف نیازی به تجزیه و تحلیل ریاضی و پیچیده تابع موردنظر ندارد و در بسیاری از زمینه‌های بهینه‌سازی به طور وسیعی استفاده می‌شود. در واقع هدف GA دستیابی به یک بهینه عمومی و نه محلی، بدون بغرنج کردن فضای جواب است. در این روش از یک مجموعه جواب‌های شدنی کوچک (جمعیت) در یک فرایند موازی شروع به تولید نسل جدید یا جمعیت جدید می‌نماید. این فرایند تکراری برگرفته از مباحث ژنتیکی تکامل موجودات است و نسل جدید را همانند فرایند بقا به طور کاملاً تصادفی از نسل حاضر تولید می‌کند.

از جمله ویژگی‌های الگوریتم ژنتیک می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

(۱) در الگوریتم ژنتیک، جمعیتی از نقاط (به جای یک نقطه) به صورت موازی مورد جستجو قرار می‌گیرند.

(۲) در الگوریتم ژنتیک از قواعد انتقال احتمالی (به جای قواعد انتقال قطعی) استفاده می‌شود.

(۳) در الگوریتم ژنتیک نیازی به اطلاع درباره مشتق‌پذیری تابع هدف نیست و تنها کافی است که برای مسأله موردنظر یک تابع برازش تعریف شود.

(۴) به راحتی می‌تواند برای مسائل چند هدفه بکار رود.

(۵) برای محیط‌های دارای نوفه مفید است.

(۶) روش‌های متعددی برای سرعت‌دهی به الگوریتم و بهبود کیفیت جواب وجود دارد و به محض افزایش

و مابقی حذف می‌شوند. نرخ انتخاب، X_{rate} کسری از N_{pop} است. تعداد کروموزوم‌هایی که در هر نسل نگهداری می‌شوند برابر است با $X_{keep} = X_{rate}N_{pop}$. در واقع هر نسل شامل X_{keep} کروموزوم ارشد و $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند است که با عمل جفت‌گیری از والدین بدست آمده‌اند. انتخاب براساس چرخ رولت بدین صورت است که در این روش کروموزوم‌های بهتر شانس انتخاب بیشتری دارند و شانس انتخاب کروموزوم متناسب با میزان برازندگی آن کروموزوم است. در روش تورنامنت ابتدا مسابقه‌ای با معمولاً ۲ یا ۳ کروموزوم اجرا می‌شود و در بین آن‌ها بهترین کروموزوم به جمعیت بعدی کپی می‌شود. این عمل به اندازه‌ی جمعیت تکرار می‌شود.

جفت‌گیری^{۱۱}:

عملگر تلاقی استاندارد برای تولید نسل جدید، بدین صورت است که دو والد به عنوان پدر و مادر انتخاب می‌شوند و حاصل جفت‌گیری دو فرزند است. والدین در مجموع باید $N_{pop} - X_{keep}$ فرزند را تولید کنند تا نسل جدید تکمیل گردد.

جهش^{۱۲}:

برای آن که الگوریتم ژنتیک سریعاً به یک مقدار بهینه محلی همگرا نشود عملگر جهش اعمال می‌شود تا تنوع بررسی و آزادی عمل الگوریتم در بررسی نقاط فضای جواب افزایش یابد. در اینجا عددی تصادفی از توزیع خاصی به مقدار ژن کروموزوم انتخابی اضافه می‌شود. اغلب کاربران GA عددی تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر را انتخاب می‌کنند. در این روش باید برای واریانس توزیع نرمال مقداری انتخاب شود. البته معمولاً کروموزوم‌هایی برای عمل جهش انتخاب می‌شوند که جزء

آگاهی از دامنه مسأله می‌توان از این روش‌ها استفاده نمود.

(۷) لیستی از متغیرهای بهینه ارائه می‌دهد و نه فقط یک جواب بهینه.

البته GA بهترین روش برای حل هر مسأله‌ای نیست. اما در مسائلی که روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی ناتوان هستند، عملکرد خوبی را به نمایش می‌گذارد. پارامترهای کلیدی الگوریتم ژنتیک عبارت‌اند از:

جمعیت:

الگوریتم ژنتیک با تعدادی از جواب‌های اولیه شدنی به نام جمعیت اولیه شروع به کار می‌کند. هر جمعیت دارای N_{pop} کروموزوم است که به طور کاملاً تصادفی از فضای جواب مسأله مورد بررسی تولید می‌شوند. هرچه این کمیت مقدار بزرگ‌تری باشد، در هر نسل محدوده‌ی بزرگ‌تری از فضای پاسخ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در واقع در مسأله بهینه‌سازی این مقاله، هر انتخاب تصادفی برای بردار (n, k, h) ، یک کروموزوم نامیده می‌شود.

انتخاب^۸:

در این مرحله براساس روشی خاص دو کروموزوم به عنوان والد برای نسل‌کشی انتخاب می‌شوند. روش‌های انتخاب متفاوت منجر به نسل‌های متفاوت خواهند شد. چرخ رولت^۹ و روش انتخابی تورنامنت^{۱۰}، روش‌های انتخاب استاندارد برای GA می‌باشند. معمولاً برای کروموزوم‌های هر نسل، مقدار تابع هزینه آن‌ها محاسبه می‌شود و به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. آن‌گاه بهترین‌های هر نسل برای عمل جفت‌گیری انتخاب

^۸Selection

^۹ Roulette

^{۱۰}Tournament

^{۱۱}Mating

^{۱۲}Mutation

بهترین کروموزوم‌های هر نسل نباشند.

نخبگی^{۱۳}:

زمانی که از اپراتورهای ژنتیکی استفاده می‌شود ممکن است بهترین کروموزوم‌ها از دست بروند. لذا لازم است که به منظور حفظ بهترین اطلاعات هر نسل، نخبگان هر نسل مستقیماً به نسل بعدی انتقال یابند. در واقع، نخبگی روشی برای نگهداری یک کپی از بهترین کروموزوم‌های هر نسل در نسل جدید است. مکانیزم فوق‌الگوریتیم ژنتیک را مجبور می‌سازد تا همواره تعدادی از بهترین‌ها را در هر نسل نگه دارد. به تجربه ثابت شده است که این مکانیزم، عملکرد الگوریتیم ژنتیک را بهبود داده و در ضمن زمان همگرایی را کوتاه می‌نماید. این عملگر توسط گلدبرگ [۱۲]، معرفی شده است. تعداد کروموزوم‌هایی که طبق این قاعده به نسل بعدی کپی می‌شوند نیز خود بحث برانگیز بوده است. بعد از آنکه عملگر تلاقی و جهش صورت پذیرفت، میزان تابع مطلوبیت برای هر کروموزوم محاسبه می‌شود. کروموزوم‌ها رتبه‌بندی می‌شوند و مجدداً بهترین‌ها انتخاب می‌شوند، معیار توقف بررسی می‌شود و مجدداً این حلقه تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می‌یابد. به عنوان مثال فرض کنید، تعداد نخبه‌ها برابر با ۳ و تعداد جمعیت برابر با ۷۵ باشد. در این صورت در بین ۷۵ انتخاب تصادفی برای بردار (n, k, h) ، ۳ بردار را که دارای کمترین $E(A)$ است، انتخاب و به جمعیت بعدی منتقل می‌کنیم.

در نرم افزار مطلب جعبه ابزاری جهت استفاده از GA در نظر گرفته شده است. جهت دسترسی به این جعبه ابزار، کاربر می‌تواند در خط فرمان دستور *gatool* را تایپ کند. شایان ذکر است، استفاده از این جعبه ابزار در بسیاری از مواقع برای برخی از مسایل بهینه‌سازی، همانند توابعی

که در طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل استفاده می‌شود، ممکن است منجر به جواب‌های بهینه نشود. برای غلبه بر این مشکل کاربر می‌بایست با ترکیب توابع مطلب و نوشتن برنامه مناسب در M فایل، قابلیت GA را برای یافتن جواب بهینه افزایش دهد.

۵ کاربرد صنعتی و ملاحظه‌های کاربردی

جدول ۱، بیانگر برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس برای یک فرایند بخصوص در یک بنگاه اقتصادی است [۲]. حال به منزله اعمال کنترل بهتر بر روی فرایند تولید، قصد استفاده از یک طرح اقتصادی \bar{X} را داریم. به همین منظور پارامترهای جدول ۱ را بر معادله‌ی (۱) اعمال کرده و متعاقباً با استفاده از الگوریتیم ژنتیک و بکارگیری نرم افزار $MATLAB$ ، مقادیر پارامترهای نمودار کنترل یعنی (n, k, h) را بگونه‌ای می‌یابیم که مقدار هزینه یا ضرر مورد انتظار کمینه شود. این بهینه‌سازی منجر به مقادیر زیر برای پارامترهای نمودار کنترل و میزان ضرر مورد انتظار می‌شود:

$$E(A) = 1/806, h = 1/41, k = 2/73, n = 5.$$

به عبارت دیگر در شرایط مذکور، انتخاب مقادیر فوق برای پارامترهای نمودار کنترل منجر به تحمل کمترین هزینه ممکن در واحد زمان یعنی ۱/۸۰۶ دلار خواهد شد. واضح است، چنانچه از طراحی آماری برای بناسازی نمودار کنترل جهت مثال مذکور استفاده شود، هزینه ممکن در واحد زمان افزایش خواهد یافت.

شایان ذکر است در بخش‌های کنترل کیفیت صنایع کشور، علی‌رغم وجود عواقب اقتصادی در استفاده از

^{۱۳}Elitism

۵. ازدیاد هزینه ثابت نمونه‌گیری منجر به افزایش فاصله نمونه‌گیری بهینه خواهد شد. این در حالیست که افزایش هزینه متغیر نمونه‌گیری علاوه بر افزایش فاصله نمونه‌گیری بهینه، منجر به کاهش پهنای حدود کنترل و اندازه نمونه بهینه خواهد شد.

۶ نتیجه‌گیری

در صنایع کشور، نمودارهای کنترل، معمولاً فقط بر اساس معیارهای آماری طراحی می‌شوند. این درحالیست که طراحی یک نمودار کنترل، عواقب اقتصادی متعددی به همراه خواهد داشت. به همین منظور در این مقاله، بر طراحی اقتصادی نمودار کنترل \bar{X} به عنوان یک طراحی جایگزین و مفید در مقایسه با طراحی آماری نمودار کنترل تأکید شد. شایان ذکر است، برای طراحی نمودار کنترل اقتصادی، از روابط و قضیه‌های مرتبط با احتمال جذب و همین‌طور متوسط مراحل جذب در زنجیرهای مارکف استفاده شد.

مراجع

- [1] Alexander, S. M., Dillman, M. A., Usher, J. S. and Damodaran, B. (1995). Economic design of control charts using the taguchi loss function. *Computers and Industrial Engineering*, 28, 671-679.
- [2] Bai, D. S. and Lee, K. T. (1998). An economic design of variable sampling

نمودارهای کنترل، همچنان این نمودارهای کنترل با دیدگاه صرفاً آماری طراحی و مورد استفاده قرار می‌گیرند. البته یکی از دلایل عمده عدم استفاده از طراحی اقتصادی نمودارهای کنترل، در صنایع کشور، پیچیده بودن برآورد پارامترهای هزینه و فرایند است.

جدول‌های ۲ و ۳، با برآورد پارامترهای هزینه و فرایند، برای چندین حالت دیگر، مقادیر بهینه‌ی پارامترهای نمودار کنترل را با فرض $E = 0$ ، $\gamma_1 = 0$ و $\gamma_2 = 0$ ارائه می‌دهد [۲]. با تحلیل نتایج مندرج در جدول مذکور، می‌توان حساسیت پارامترهای نمودار کنترل را نسبت به تغییر پارامترهای فرایند مورد بررسی قرار داد. برخی از نتایج تحلیل حساسیت مدل به شرح زیر است:

۱. افزایش هزینه شناسایی انحراف با دلیل و هزینه بررسی زنگ خطرهای اشتباهی عموماً منجر به افزایش فاصله بین حدود کنترل و کاهش α می‌شود.

۲. تغییرات δ به طور جدی اندازه نمونه را تحت تاثیر قرار می‌دهد، به طوری که اندازه نمونه بهینه برای بررسی δ های بزرگ، کوچک و برعکس برای بررسی δ های کوچک، بزرگ خواهد بود.

۳. هزینه تولید محصول در حالت‌های تحت کنترل و خارج از کنترل، مقدار فاصله نمونه‌گیری بهینه را تحت تاثیر قرار می‌دهد. این اثر بگونه‌ای است که مقادیر کوچک هزینه‌های مذکور، منجر به انتخاب مقادیر بهینه بزرگ فاصله نمونه‌گیری خواهد شد.

۴. تغییرات متوسط مدت زمانی که فرایند تحت کنترل باقی می‌ماند (λ)، فاصله نمونه‌گیری را تحت تاثیر قرار می‌دهد به طوری که λ های کوچک‌تر منجر به انتخاب مقادیر بهینه بزرگ‌تر فاصله نمونه‌گیری خواهد شد.

- [7] Chou, C. Y., Liu, H. R. and Chen, C. H. (2001b). Economic design of average control charts for monitoring a process with correlated data. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 18, 49-53.
- [8] Cinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic process*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall.
- [9] Costa, A. F. and Rahim, M. (2001). Economic design of \bar{X} charts with variable parameters, the Markov chain approach. *Journal of Applied Statistics*, 28(7), 875-885.
- [10] De Magalhães, M. S., Costa, A. F. and Neto, F. D. M. (2006). Adaptive control charts, a Markovian approach for processes subject to independent disturbances. *International Journal of Production Economics*, 99(1), 236-246.
- [11] De Magalhães, M. S. and Von Doellinger, R. O. S. (2015). Monitoring linear profiles using an adaptive control chart. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 1-13.
- [12] Goldberg, D.E. (1989). Genetic algorithms in search, optimization, and interval \bar{X} control charts. *International Journal of Production Economics*, 54, 57-64.
- [3] Castillo, E. D. and Montgomery, D. C. (1996). A general model for the optimal economic design of \bar{X} charts used to control short and long run processes. *IIE Transactions*, 28, 193-201.
- [4] Chen, Y. K. (2007). Economic design of variable sampling interval T_2 control charts-a hybrid Markov chain approach with genetic algorithms. *Expert Systems with Applications*, 33(3), 683-689.
- [5] Chou, C. Y., Chen, C. H., Liu, H. R. and Wang, P. H. (2000). Statistically minimum-loss design of averages control charts for non-normal data. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, 24(6), 472-479.
- [6] Chou, C. Y., Li, M. H. and Wang, P. H. (2001a). Economic statistical design of average control charts for monitoring a process under non-normality. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 17(8), 603-609.

Journal of Production Research, 28,
595-608.

machine learning reading. Addison-
Wesley, MA.

پیوست

در ادامه جداول مربوطه ارائه شده اند.

[13] Holland, J. H. (1975). Adaptation in nature and artificial system. Ann Arbor, Michigan, USA, The University of Michigan Press.

[14] Hu, X., Castagliola, P., Sun, J. and Khoo, M. B. (2015). The performance of variable sample size \bar{X} chart with measurement errors. Quality and Reliability Engineering International.

[15] Lorenzen, T. J., and Vance, L. C. (1986). Economic design of control charts, an unified approach. Technometrics, 28(1), 3-10.

[16] Parkhidek, S. and Parkhideh, B. (1996). The economic design of a flexible zone \bar{X} chart with At and T rules. IIE Transactions, 28, 261-266.

[17] Teoh, W. L., Khoo, M. B. , Castagliola, P. and Chakraborti, S. (2014). Optimal design of the double sampling chart with estimated parameters based on median run length. Computers and Industrial Engineering, 67, 104-115.

[18] Yang, K., and Hancock, W. M. (1990). Statistical quality control for correlated samples. International

جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل اقتصادی لورنزن و وانس ($E = 0$).

$\delta = 2$	$\gamma_2 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\lambda = 0.01$
$C_1 = 100$	$C_0 = 0$	$T_1 + T_2 = 0.3$	$T_0 = 0.1$
$a_3' = 10$	$a_3 = 30$	$a_2 = 0.1$	$a_1 = 0.5$

جدول ۲: پارامترهای هزینه و فرایند

a_2	a_1	C_1	C_0	a_3	a_3'	$T_1 + T_2$	T_0	δ	λ	No.
0.1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	2	0.01	1
0.1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	2	0.05	2
0.1	0.5	10	8	30	10	0.3	0.1	2	0.01	3
0.1	0.5	10000	9000	30	10	0.3	0.1	2	0.01	4
0.1	0.5	100	90	75	25	0.3	0.1	2	0.01	5
0.1	0.5	100	90	30	10	1.5	0.5	2	0.01	6
0.1	0.5	100	90	210	10	2.1	0.1	2	0.01	7
0.1	0.5	100	90	3	1	0.3	0.1	2	0.01	8
0.1	5	100	90	30	10	0.3	0.1	2	0.01	9
1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	2	0.01	10
0.1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	1	0.01	11
0.1	0.5	20	15	30	10	0.3	0.1	1	0.01	12
0.1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	1	0.05	13
0.1	0.5	100	90	30	10	0.3	0.1	0.5	0.01	14
0.1	0.5	5	4	30	10	0.3	0.1	0.5	0.01	15
0.1	0.5	100	0	30	10	0.3	0.1	2	0.01	16

جدول ۳: مقادیر بهینه پارامترهای نمودار کنترل

$E(A)$	α	h	k	n	No.
90.46	0.09	4.05	1.71	3	1
91.08	0.10	1.85	1.65	3	2
8.48	0.01	8.00	2.65	4	3
305.96	0.32	0.01	1.00	1	4
90.95	0.00	4.59	2.83	5	5
27.70	0.32	0.01	1.00	1	6
90.63	0.09	4.08	1.70	3	7
42.53	0.32	0.01	1.00	1	8
91.11	0.12	8.00	1.57	4	9
90.72	0.32	5.27	1.00	1	10
90.59	0.32	4.75	1.00	5	11
15.72	0.03	8.00	2.11	11	12
91.33	0.32	2.15	1.00	5	13
90.80	0.32	4.54	1.00	9	14
4.63	0.06	8.00	1.85	7	15
1.80	0.01	1.38	2.68	5	16