آزمون‌های نیکویی برازش توزیع نمایی بر اساس داده‌های تبدیل یافته و مبتنی بر آنتروپی

احمد علی اشتری نژاد، حسن صادقی
گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

چکیده

آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی از دیرباز مورد توجه محققان بسیاری قرار داشته است. این آزمون‌ها باتوجه به نوع مشخصه‌سازی توزیع نمایی تقسیم بندی می‌شوند. در این پژوهش ابتدا چهارچوب آزمون مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته را با استفاده آنتروپی تشریح می‌کنیم. سپس آزمون‌هایی را بر مبنای برآوردگرهای آنتروپی معرفی خواهیم نمود. در انتها ضمن تشریح سایر آزمون‌های کلاسیک به منظور مقایسه آزمون‌ها از توزیع‌های متقابل متفاوت شبیه سازی نموده و توان آزمون‌ها را بدست آوردیم. نتایج حاصل شده حاکی از آن است که هرچند هیچ آزمونی بر سایر آزمون‌ها برتری کامل را نداشته ولی آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی در بیشتر موارد برتری محسوسی نسبت به سایر آزمون‌ها داشته‌اند.

واژه‌های کلیدی: آزمونهای کلاسیک نیکویی برازش، آنتروپی، برآوردگرهای آنتروپی ، توان آزمون.

۱ مقدمه

یکی از مهمترین مفاهیم آماری که به وسیله آن رفتار متغیر تصادفی، مورد بررسی قرار می‌گیرد توزیع آماری متغیرهاست. در علوم مهندسی و مطالعات قابلیت اعتماد، دانستن اینکه توزیع داده‌ها از چه نوعی است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. یکی از مهمترین و پرکاربردترین توزیع‌ها، توزیع نمایی است. بنابراین ارائه روشی برای بررسی اینکه آیا مشاهدات از توزیع نمایی پیروی می‌کنند یا خیر؟ ضروری به نظر می‌رسد. آزمون‌های نیکویی برازش توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرارگرفته و آزمون‌های بسیاری معرفی شده است. در این میان آزمون‌های کلموگروف-اسمیرنوف و کرامر-ون مایز از قدیمی‌ترین آزمون‌ها بوده که بر مبنای توزیع تجربی داده‌ها بنا نهاده شده است. کلار[۲۰] آماره‌ای بر پایه توزیع تجربی به منظور آزمون نیکویی برازش ارائه داد. وی پس از بدست آوردن آماره خود نشان داد که این آماره برای هر توزیع مقابلی سازگار است. اما آزمون‌هایی نیز بر پایه فاصله‌های آماره های ترتیبی ارائه شده است، که از این جمله می‌توان به آماره ارائه شده توسط دی آگوستینو و استفان [۷] اشاره کرد. در بین پژوهشگران هنزی تحقیقات فراوانی بر روی نیکویی برازش توزیع نمائی

صورت داده است، او به همراه محققان دیگر آماره‌هایی مبتنی بر میانگین باقی مانده عمر، تبدیلات لاپلاس و تابع مشخصه ارائه داد. بطور مثال بارینقوس و هنزی [۴] آزمون هایی همانند کلموگروف-اسمیرنوف و کرامر-ون مایز ارائه دادند. با توجه به منحصر به فرد بودن تبدیلات لاپلاس توزیع، آزمون‌هایی نیز بر مبنای تبدیلات لاپلاس ارائه شده است، که از این جمله می توان به [۳] و [۱۵] و [۱۶] اشاره نمود. همچنین با توجه به خواص مشابه تبدیلات لاپلاس برای تابع مشخصه آزمون‌هایی بر پایه تابع مشخصه نیز ارائه شده است. به عنوان مثال [۲۴]، [۱۸]، [۱۲]، [۱۷] و [۲۲] از جمله این نوع آزمون هستند.

در سال های اخیر آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی نیز مورد توجه محققان بوده است. ابراهیمی و همکاران [۱۰] آزمون نیکویی برازش مبتنی بر اطلاع کولبک-لیبلر را با استفاده از برآوردگر آنتروپی واسیچک [۲۶] ارائه داد. پس از او محققان زیادی با استفاده برآوردگرهای مختلف آنتروپی آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی را مورد بررسی قرار دادند.

دادویچ و وندمولن [۹]، مودهولکر و تیان [۲۳] و چو و کیم [۵] برای دیگر توزیع‌ها براساس خاصیت ماکسیمم آنتروپی آزمون‌هایی معرفی نمودند و نشان دادند که آزمون های مبتنی برآنتروپی دارای توان نسبتاً خوبی می باشند. اما در سال‌های اخیر نیز آزمون‌هایی بر مبنای داده‌های تبدیل یافته مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است. علیزاده و ارقامی [۲] توان این آزمون را با توان آزمون نمایی بودن بر اساس اطلاع کولبک - لیبلر معرفی شده توسط [۱۰] مقایسه نمودند و نتیجه گرفتند که آزمون پیشنهادی شان از توان بالایی نسبت به آزمون ابراهیمی و همکاران [۱۰] برخوردار است. دهمال و شیرک [۸] آزمون نمایی بودن به کمک تبدیل داده ها معرفی شده توسط ابراهیمی و همکاران [۱۰] را بهبود بخشیدند.

در این پژوهش برآنیم تا به مقایسه آزمون‌های نیکویی برازش توزیع نمایی مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته مبتنی بر آنتروپی بپردازیم. از این رو ضمن معرفی مهمترین آزمون‌های نیکویی برازش توزیع نمایی، برخی از آزمون‌های مبتنی آنتروپی که بر اساس داده‌های تبدیل یافته بدست می‌آیند را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا در بخش دوم مقاله چهارچوب آزمون‌های مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته را با استفاده از آنتروپی مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم ضمن معرفی برخی از برآوردگرهای آنتروپی، آماره‌های آزمونی بر اساس آن‌ها تبیین می‌نماییم. در بخش چهارم به معرفی کوتاهی از مهمترین آزمون‌های نیکویی برازش توزیع نمایی خواهیم پرداخت. بخش پنجم نیز شامل مقایسه این آزمون‌ها به وسیله شبیه سازی خواهد بود. در انتها بخش ششم نتیجه‌گیری آزمون‌های معرفی شده را دربر خواهد داشت.

۲ چهارچوب آزمون مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته

فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته نامعلوم F با تابع چگالی f و تکیه گاه $[0, \infty)$ با میانگین $\mu < \infty$ باشد. علاقمند به آزمون فرضیه زیر هستیم:

$$H_0 : f(x) = g(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x},$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{\mu}$ نا معلوم است. فرضیه جانشین عبارت است از

$$H_1 : f(x) \neq g(x; \lambda).$$

برای بدست آوردن آزمونی برای فرضیه بالا، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. *فرض کنید $X_۱, X_۲$ دو مشاهده مستقل از توزیع پیوسته F باشند. آنگاه*

i) $W = \frac{X_۱}{X_۱ + X_۲}$ دارای توزیع یکنواخت $U(۰,۱)$ است اگر و فقط اگر F توزیع نمایی باشد.

ii) $Y = \frac{X_۱}{X_۲}$ دارای توزیع یکنواخت $F_{(۲,۲)}$ است اگر و فقط اگر F توزیع نمایی باشد.

iii) $Z = \frac{X_۱ - X_۲}{X_۱ + X_۲}$ دارای توزیع یکنواخت $U(-۱,۱)$ است اگر و فقط اگر F توزیع نمایی باشد.

($F_{(۲,۲)}$ نشان دهنده توزیع فیشر با درجات آزادی ۲ و۲ است.)

اثبات. برهان را در [۲۱] می‌توان یافت. □

با توجه به قضیه بالا آزمون هایی برای توزیع نمایی بصورت زیر می توان ساخت. فرض کنید $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع مجهول F با تابع چگالی احتمال f باشد. ابتدا داده های نمونه را به داده های زیر تبدیل می کنیم.

$$W_{ij} = \frac{X_i}{X_i + X_j}, \qquad Y_{ij} = \frac{X_i}{X_j},$$
$$Z_{ij} = \frac{X_i - X_j}{X_i + X_j}, \qquad i \neq j, \quad i,j = ۱,۲,...,n.$$

با توجه به قضیه بالا، تحت فرضیه صفر (نمایی بودن توزیع جامعه) W_{ij} ها ، Y_{ij} ها و Z_{ij} ها به ترتیب توزیع یکنواخت $U(۰,۱)$ ، فیشر $F(۲,۲)$ و یکنواخت $U(-۱,۱)$ دارند. حال فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ وتکیه گاه S باشد آنگاه

$$H(X) = -\int_S f(x)\log f(x)dx,$$

آنتروپی X می‌نامیم. از این رو می‌توان برای آزمون این فرضیه از آماره آزمون زیر استفاده کنیم:

$$\hat{D}_{\inf} = -\hat{H} - \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log(f_۰(x_i)), \qquad (۱)$$

که $\hat{H}$ برآوردگر آنتروپی، $f_۰$ تابع چگالی احتمال تحت فرضیه صفر می‌باشد.

۳ برآوردگرهای آنتروپی

به خاطر کاربرد های فراوان آنتروپی در مباحث آماری همچون آزمون های نیکویی برازش، برآوردگرهای مختلف زیادی برای آنتروپی توسط محققان ارائه شده است. از این رو در این بخش برآوردگرهای مختلف آنتروپی را مورد بررسی قرار می دهیم. برآورد واسیچک [۲۶] از رابطه

$$HV_{nm} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log\left(\frac{n}{۲m}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right), \qquad (۲)$$

بدست آمده که m یک عدد صحیح مثبت کوچکتر یا مساوی با $\frac{n}{۲}$ و به ازای $i < ۱$، $X_{(i)} = X_{(۱)}$ و به ازای $i > n$ $X_{(i)} = X_{(n)}$ می باشد.

همچنین برآورد ون ای اس [۲۵] توسط رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & HVE_{nm} \\ = \; & \frac{۱}{n-m}\sum_{i=۱}^{n-m}\left(\log\left(\frac{n+۱}{m}(X_{(i+m)} - X_{(i)})\right)\right) \\ + \; & \sum_{k=m}^{n}\frac{۱}{k} + \log(m) - \log(n-۱). \end{aligned}$$

که در آن $X_{(۱)}, ..., X_{(n)}$ آماره های مرتب نمونه و m یک

عدد مثبت کوچکتر یا مساوی با $\frac{n}{۲}$ است.

از طرفی برآورد آنتروپی ابراهیمی و همکاران [۱۱]عبارتست از:

$$HE_{nm} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log\left\{\frac{n}{c_i m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\}.$$

که در آن

$$c_i = \begin{cases} ۱ + \frac{i-۱}{m} & ۱ \leq i \leq m \\ ۲ & m+۱ \leq i \leq n-m \\ ۱ + \frac{n-i}{m} & n-m+۱ \leq i \leq n \end{cases}$$

است. همچنین $x_{(i-m)} = x_{(۱)}$ اگر $i \leq m$ و $x_{(i+m)} =$ $x_{(n)}$ اگر $i \geq n-m$ در نظر می گیریم.

کوریا [۶] اصلاح دیگری را از برآوردگر واسیچک [۲۶] ارائه کرد که آن را توسط رابطه زیر ملاحظه می‌کنید:

$$HV_{nm} = -\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log\left(\frac{\frac{i+m}{n} - \frac{i-m}{n}}{(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})}\right). \quad (۳)$$

بر اساس این برآوردها می‌توان آماره$\hat{D}_{\inf}$ را بدست آورد. جدول ۱ آماره‌ها را بر مبنای برآودگرهای واسیچک، ون ای اس، ابراهیمی و همکاران و کوریا به تفکیک نوع تبدیل بیان می‌دارد. در واقع تفاوت‌های آماره‌های این جدول در نوع برآورد آنتروپی و توزیع تبدیل یافته آن می‌باشد. این موضوع سبب بدست آمدن آزمون‌های متفاوتی خواهد شد که در بخش شبیه سازی بدان می‌پردازیم. برای مقادیر بزرگ هریک از آماره‌ها، آزمون فرضیه $H_۱$ را پشتیبانی می‌کند. از این‌رو در هریک از آن‌ها کافیست توزیع تجربی را بدست آورده و مقادیر بحرانی را تعیین نماییم.

۴ آزمون‌های کلاسیک

اگر $X_۱, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین μ و $\widehat{\mu} = \overline{X}$ آنگاه متغیرهای جدید را می توان به وسیله تغییر متغیر زیر تعریف نمود:

$$Y_i = \frac{X_i}{\widehat{\mu}} \quad i = ۱, ۲, ..., n.$$

می توان $\hat{F}_n(x)$ را برای مقادیر Y_i به صورت زیر بدست آورد:

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} ۰ & x < y_{(۱)} \\ \frac{j}{n} & y_{(j)} \leq x < y_{(j+۱)} \\ ۱ & x \geq y_{(n)} \end{cases}$$

که در آن $y_{(i)}$ مقدار مشاهده آماره ترتیبی Y_j است. در این شرایط آماره کلموگروف–اسمیرنوف به صورت زیر بدست می‌آید:

$$KS_n = sup_{x\geq ۰}|\hat{F}_n(x) - F(x)|.$$

جدول ۱: آماره های آزمون فرضیه بر مبنای داده های تبدیل شده

نوع تبدیل	توزیع تبدیل شده تحت فرض نمایی بودن	آماره بر مبنای نوع برآوردگر
$W_{ij}=\frac{X_i}{X_i+X_j}$	$U(0\,1)$	$WV_{nm}=-HV_{nm}$ $WVE_{nm}=-HV_{nm}$ $WE_{nm}=-HE_{nm}$ $WC_{nm}=-HC_{nm}$
$Y_{ij}=\frac{X_i}{X_j}$	$F(2,2)$	$YV_{nm}=-HV_{nm}+\frac{2}{n'}\sum_{i=1}^{n'}\log(1+Y_i)$ $YVE_{nm}=-HV_{nm}+\frac{2}{n'}\sum_{i=1}^{n'}\log(1+Y_i)$ $YE_{nm}=-HE_{nm}+\frac{2}{n'}\sum_{i=1}^{n'}\log(1+Y_i)$ $YC_{nm}=-HC_{nm}+\frac{2}{n'}\sum_{i=1}^{n'}\log(1+Y_i)$
$Z_{ij}=\frac{X_i-X_j}{X_i+X_j}$	$U(-1,1)$	$ZV_{nm}=-HV_{nm}+\log(2)$ $ZVE_{nm}=-HV_{nm}+\log(2)$ $ZE_{nm}=-HE_{nm}+\log(2)$ $ZC_{nm}=-HC_{nm}+\log(2)$

همچنین آماره کرامر - ون مایز از رابطه زیر حاصل می شود:

$$w_n^2=n\int_0^\infty(\hat{F}_n(x)-F(x))dF(x) \qquad (۴)$$

$$=n\int_0^1(\hat{F}_n(F^{-1}(z))-z)^2dz$$

$$=n\int_0^1(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{(0,F^{-1}(t))}(Y_i)-z)^2dz$$

$$=n\int_0^1(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{(0,t)}(F(Y_i))-z)^2dz. \qquad (۵)$$

آماره کلار [۲۰] را می توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$T_{na}=\frac{2(3a+2)n}{(2+a)(1+a)^2}+2a^3\sum_{i=1}^{n}\frac{e^{(-(1+a)Y_i)}}{(1+a)^2}-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{(-aY_i)}+\frac{2}{n}\sum_{i<j}[a(Y_{(j)}-Y_{(i)})-2]e^{-aY_{(i)}}. \qquad (۶)$$

بارنیقوس و هنزی [۴] به غیر از آزمون کلموگروف - اسمیرنف بر پایه میانگین باقی مانده عمر آزمونی معرفی نمودند و آماره آن را بصورت زیر تعریف کردند:

$$\overline{KS_n}=\sqrt{n}\sup_{t\geq 0}[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\min(Y_j,t)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{\{Y_i\leq t\}}]. \qquad (۷)$$

همچنین آماره کرامر - ون مایز برحسب میانگین طول

عمر باقی مانده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\overline{CMn}\\
&= n\int_0^\infty \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \min(Y_i,t) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n I_{\{Y_i\le t\}}\Big)^2 e^{-t}dt\\
&= n\Big[\sum_{i=0}^n A_i^2\big(e^{-Y_{(i)}} - e^{-Y_{(i+1)}}\big)\\
&+ 2A_i\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\big(e^{-Y_{(i)}}(1+Y_{(i)})\big)\\
&- e^{-Y_{(i+1)}}(1+Y_{(i+1)})\big)\\
&+ \Big(1+\frac{i}{n}\Big)^2 e^{-Y_{(i)}}\big(2+2Y_{(i)}+Y_{(i)}^2\big)\\
&- \Big(1-\frac{i}{n}\Big)^2 e^{-Y_{(i+1)}}\big(2+2Y_{(i)}+Y_{(i+1)}^2\big)\Big]. \qquad (8)
\end{aligned}$$

یکی از راه های شناسایی یک توزیع تابع مشخصه است. بر این مبنا اپز و پولی [۱۲] آماره ای را برای آزمون نیکویی برازش به صورت زیر ارائه دادند:

$$\begin{aligned}
&EP_n\\
&= (48n)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\varphi_n(t) - \frac{1}{1-i\bar{X}t}\Big)\frac{\bar{X}_n}{2\pi(1+i\bar{X}_n t)}dt\\
&= (48n)^{\frac{1}{2}}\Big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e^{-Y_j} - \frac{1}{2}\Big]. \qquad (9)
\end{aligned}$$

در هریک از آزمون‌های تبیین شده برای مقادیر بزرگ آماره آزمون، فرض H_0 رد خواهد شد. از این رو محققان پس از بدست آوردن توزیع تجربی آماره آزمون خود، مقادیر بحرانی آزمونی را بدست آورده اند.

۵ مقایسه توان آزمون‌ها

به منظور مقایسه توان آزمون‌ها، از توزیع‌های زیر در فرض مقابل(H_1) به عنوان توزیع جانشین استفاده کرده‌ایم:

توزیع وایبل$W(\theta)$ با تابع چگالی

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\exp\{-x^\theta\}.$$

توزیع گاما$\Gamma(\theta)$ باتابع چگالی

$$f_\theta(x) = (\Gamma(\theta))^{-1}x^{\theta-1}exp\{-x\}.$$

توزیع نیم‌نرمال[۱] HN با چگالی

$$f_\theta(x) = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\exp\Big\{\frac{-x^2}{2}\Big\}.$$

توزیع یکنواختU با چگالی

$$f_\theta(x) = 1, \quad 0\le x\le 1.$$

توزیع مقادیر غایی تعدیل یافته[۲] با تابع توزیع

$$F_\theta(x) = 1-\exp\Big\{\theta^{-1}\Big(1-\exp\{x\}\Big)\Big\}.$$

توزیع دهیلون[۳] (۱۹۸۱) $DL(\theta)$ با تابع توزیع

$$F_\theta(x) = 1-exp\Big\{-\Big(\log(x+1)\Big)^{\theta+1}\Big\}.$$

توزیع چن[۴] (۲۰۰۰) $CH(\theta)$ با تابع توزیع

[۱] Half-normal
[۲] Modified extreme value
[۳] Dhillon
[۴] Chen

$$F_\theta(x) = ۱ - \exp\left\{۲\left(۱ - \exp\{x^\theta\}\right)\right\}.$$

این توزیع‌ها توسط هنزی و مینتنز [۱۹] و گرانه و فرتینا [۱۴] در مقایسه توان‌های چندین آزمون نمائی بکار برده شده است. نتایج شبیه سازی مقایسه توان‌های آزمون‌های مختلف نمائی بودن به ازای حجم نمونه ۲۰ در جدول‌های۲ و ۳آمده است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

همان طور که در جداول ۲ و۳ پیداست، هیچ یک از آزمون‌ها برتری کاملی بر دیگران ندارد. در برخی از موارد اختلاف توان آزمون‌ها با یکدیگر بسیار زیاد است. اما در مجموع می توان چنین گفت که آزمون‌های مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته عملکرد بهتری نسبت به سایرین داشته است. در جداول نتایج توان آزمونی که بیشترین توان را داشته بزرگتر از سایر اعداد نشان دادیم. در بین تمامی آزمون‌ها، آزمون مبتنی بر آماره WVE_{nm} بیشترین رتبه اول را داشته است. از این رو این آزمون برتری نسبی در برابر سایر آزمون ها داشته است. در آینده می‌توان با استفاده از آزمون‌های مبتنی برآنتروپی، آزمون‌های دقیق‌تری پیشنهاد داد. به طور مثال آینده این پژوهش می تواند با مطالعه دقیق‌تر بروی پارامتر m برای هریک از توزیع‌های مقابل نسبت به ارائه راه حل دقیق تر و علمی تر به منظور افزایش توان آزمون های مبتنی بر آنتروپی صورت پذیرد.

مراجع

[1] Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N.R. (2011a), Monte Carlo comparison of five exponentiality tests using different entropy estimates, Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(11), 1579–1592.

[2] Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N.R. (2011b), Monte Carlo comparison of five exponentiality tests using different entropy estimates, Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(11), 1579–1592.

[3] Baringhaus, L., Henze, N. (1991), A class of consistent tests for exponentiality based on the empirical Laplace transform. Ann Inst Statist Math 43:551–564

[4] Baringhaus, L., Henze, N. (2000), Tests of fit for exponentiality based on a characterization via the mean residual life function. Statistical Papers 41:225–236

[5] Choi, B. and Kim, K. (2006), Testing goodness-of-fit for Laplace distribution based on maximum entropy, Statistics, Vol. 40, No. 6, 517–531.

جدول ۲: توان آزمون های مبتنی بر داده‌های تبدیل یافته در حجم نمونه۲۰

جانشین	$WV_{m,n}$	$WVE_{m,n}$	$WE_{m,n}$	$WC_{m,n}$	$ZV_{m,n}$	$ZVE_{m,n}$
$W(۲)$	۰/۹۱۴۲	۰/۹۳۵۶	۰/۹۲۰۸	۰/۹۱۷۴	۰/۹۳۲۴	**۰/۹۵۱۴**
$\Gamma(۲)$	۰/۵۵۸۶	**۰/۶۳۴**	۰/۵۸۰۸	۰/۵۷۰۸	۰/۵۹۷۶	۰/۵۲۳
$U(۰,۱)$	۰/۴۹۱۸	۰/۵۰۱۴	۰/۵۱۲۲	۰/۴۶۷۲	۰/۵۴۵۶	۰/۴۹۶۶
$CH(۱/۵)$	۰/۷۲۹۶	۰/۷۶۵۶	۰/۷۵۰۲	۰/۷۳۱۲	۰/۷۵۰۲	۰/۶۹۸۲
$EV(۱/۵)$	۰/۳۴	۰/۳۶۷	۰/۳۵۶۸	۰/۳۳۷۸	۰/۳۵۴۸	۰/۳۲۴۴
$DL(۱/۵)$	۰/۷۶۱۲	**۰/۸۲۴**	۰/۷۸۰۴	۰/۷۷۳	۰/۷۷۹۶	۰/۷۳۱۶
HN	۰/۱۸۹۸	**۰/۲۱۸۸**	۰/۲۰۵	۰/۱۹۳	۰/۱۹۳۸	۰/۱۶۸۲
جانشین	$YV_{m,n}$	$YVE_{m,n}$	$YE_{m,n}$	$YC_{m,n}$	$ZE_{m,n}$	$ZC_{m,n}$
$W(۲)$	۰/۹۲۵۴	۰/۸۹۹	۰/۹۲۴۸	۰/۹۲۳۴	۰/۹۳۲۸	۰/۹۳۱
$\Gamma(۲)$	۰/۵۹۷۶	۰/۵۲۳	۰/۵۹۴۴	۰/۵۹۸۶	۰/۵۹۴۴	۰/۵۹۸۶
$U(۰,۱)$	۰/۵۴۵۶	۰/۴۹۶۶	۰/۵۴۲۶	۰/۵۱۷	۰/۵۴۲۶	۰/۵۱۷
$CH(۱/۵)$	۰/۷۵۰۲	۰/۶۹۸۲	۰/۷۴۸۴	۰/۷۴۴۲	۰/۷۴۸۴	۰/۷۴۴۲
$EV(۱/۵)$	۰/۳۵۴۸	۰/۳۲۴۴	۰/۳۵۳	۰/۳۴۸۸	۰/۳۵۳	۰/۳۴۸۸
$DL(۱/۵)$	۰/۷۷۹۶	۰/۷۳۱۶	۰/۷۷۷۴	۰/۷۷۸۸	۰/۷۷۷۴	۰/۷۷۸۸
HN	۰/۱۹۳۸	۰/۱۶۸۲	۰/۱۹۳۲	۰/۱۹۴۶	۰/۱۹۳۲	۰/۱۹۴۶

جدول ۳: توان مهمترین آزمون‌های کلاسیک برای حجم نمونه ۲۰

جانشین	EP_n	$\overline{KS}_n$	$\overline{CM}_n$	$w_n^۲$	KS_n	$T_{n۱}$
$W(۲)$	۰/۰۰۲	۰/۹۳۲	۰/۹۳۸	۰/۹۴۴	۰/۸۴۲	۰/۹۳
$\Gamma(۲)$	۰/۰۰۲	۰/۴۹۸	۰/۴۴۶	۰/۵۰۲	۰/۳۹۸	۰/۴۶۲
$U(۰,۱)$	۰	۰/۶۹۴	۰/۷۱۴	۰/۴۸۴	۰/۵۷۸	**۰/۷۱۶**
$CH(۱/۵)$	۰	۰/۸۲۲	۰/۸۰۸	۰/۶۸۶	۰/۰۵۲	**۰/۸۶۴**
$EV(۱/۵)$	۰	**۰/۵۰۲**	۰/۴۶۴	۰/۳۶۴	۰/۵۰۱	۰/۴۶۸
$DL(۱/۵)$	۰	۰/۶۶۴	۰/۶۳۶	۰/۶۴۲	۰/۵۵۲	۰/۶۲۲
HN	۰	۰/۱۶	۰/۱۰۶	۰/۱۲۶	۰/۱۹۶	۰/۱۳۲

[6] Correa, J.C., (1995), A new estimator of entropy. Communications in Statistics– Theory and Methods, 24, 2439–2449.

[7] D'Agostino, R. B., Stephens, M. A. (1986), Goodness-of-Fit Techniques. New York: Marcel Dekker, Inc.

[8] Dhumal, B. R. and Shirke, D. T. (2012), A modified test for testing exponentiality using transformed data, Journal of Statistical Computation and Simulation, DOI:10.1080/00949655.2012.710850.

[9] Dudewicz, E.J. and Van der Meulen, E.C. (1981), Entropy-based tests of uniformity, journal of American Statistical Association, 76, 967-974.

[10] Ebrahimi, N., Habibullah M. and Soofi, E. (1992), Testing exponentiality based on Kullback-Leibler information. Journal of the Royal Statistical Society, B, 54, 739–748.

[11] Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two measures of sample entropy. Statistics and Probability Letters, 20, 225–234.

[12] Epps, T. W., Pulley, L. B. (1986), A test for exponentiality vs. monotone hazard alternatives derived from the empirical characteristic function. J Roy Statist Soc B, 48:206–213

[13] Gokhale, D.V., (1983), On entropy-based goodness-of-fit tests. Computational Statistics and Data Analysis, 1, 157–165.

[14] Grane, A. and Fortiana, J. (2011), A directional test of exponentiality based on maximum correlations, Metrika, 73, 255-274.

[15] Henze, N. (1993), A new flexible class of omnibus tests for exponentiality. Commun Statist – Th Meth 22:115–133

[16] Henze, N., Meintanis, S. G. (2002a), Tests of fit for exponentiality based on the empirical Laplace transform. Statistics 36:147–161

[17] Henze, N., Meintanis, S. G. (2002b), Goodness-of-fit tests based on a new characterization of the Exponential distribution. Commun Statist – Th Meth 31:1479–1497

[18] Henze N, Klar B, Meintanis SG (2003) Invariant tests for symmetry about an unspecified point based on the empirical characteristic function. J Multivar Anal 87:275–297

[19] Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), Recent and classical tests for exponentiality: A partial review with comparisons, Metrika, 61, 29-45.

[20] Klar, B. (2001), Goodness–of–fit tests for the exponential and the normal distribution based on the integrated distribution function. Ann Instit Statist Math 53:338–353

[21] Kotz, S. and Stentel, F. W. (1988), Note on a characterization of exponential distributions, Statistics and Probability Letters, 6, 201–203.

[22] Meintanis, S. G. , Iliopoulos, G. (2003), Characterizations of the exponential distribution based on cer-

tain properties of its characteristic function. Kybernetika, 39:295–298

[23] Mudholkar, G. S., and Tian, L. (2002), An entropy characterization of the inverse Gaussian distribution and related goodness of fit test, Journal of Statistical Planning and Inference, 102- 211-221.

[24] Ushakov, N. G. (1999), Selectic Topics in Characteristic Functions. VSP, Utrecht

[25] Van Es, B. (1992), Estimating functionals related to a density by class of statistics based on sapacings, Scand. J. Statistics, 19, 61-72

[26] Vasicek, O. (1976), A test for normality based on sample entropy, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 38, 54-59.