

پیوند آمیخته-مقیاس نرمال برای مدل سازی سری های زمانی دودوئی تحت رهیافت فضا-حالت

امیرعلی کریمزاده، ایرج کاظمی
دانشگاه اصفهان

چکیده

در این مقاله به معرفی کلاس مدل های آمیخته فضا-حالت دودوئی با پیوندهای آمیخته-مقیاس نرمال پرداخته می شود. استنباط آماری با استفاده از تعمیمی از الگوریتم های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی انجام می شود. همچنین برای بررسی برازش مدل ها لگاریتم امتیاز پیش بین با به کارگیری الگوریتم PL محاسبه می گردد. با تحلیل مجموعه داده های واقعی نشان داده می شود که این کلاس از مدل ها بسیار منعطف هستند به طوری که همبستگی پیاپی و بیش پراکنش مشاهدات را لحاظ می کنند و پیش بینی بهتری نسبت به مدل های رقیب ارائه می دهند.

واژه های کلیدی: آمیخته-مقیاس نرمال، امتیاز پیش بین، مدل فضا-حالت، مونت کارلوی زنجیر مارکوفی.

به صورت

۱ مقدمه

$$F_{SMN}(y) = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{u}{\sigma} \sqrt{y - \mu}\right) \pi(u) du,$$

مدل های فضا-حالت برای پاسخ های دودوئی با پیوند پروبیت توسط سی-زادو و سانگ [۲] مورد بررسی قرار گرفت. آن ها نشان دادند که مدل فضا-حالت دودوئی با پیوند پروبیت دارای توانایی پیش بینی بالایی است. در این مقاله مدل های آمیخته فضا-حالت دودوئی با پیوندهای آمیخته-مقیاس نرمال (SMN) فرمول بندی می شوند و از تعمیم روش های $MCMC$ برای انجام استنباط استفاده می شود. تابع توزیع خانواده توابع آمیخته-مقیاس نرمال است که در آن U متغیر آمیختگی با تابع چگالی $\pi(u)$ و تابع توزیع $H(u)$ می باشد و $\Phi(\cdot, \cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. این خانواده علاوه بر این که شامل توزیع های مختلفی مانند تی-استیودنت، واریانس-گاما و اسلس است، دم سنگین تر از نرمال می باشد و زمینه را برای استنباط استوار در مدل های فضا-حالت دودوئی فراهم می کند (چوی و چان [۳]).

۲ مدل آمیخته فضا-حالت دودوئی با پیوند آمیخته-مقیاس نرمال

با پارامترهای $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ و $H(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی پارامتر آمیختگی U_t است. مدل آمیخته فضا-حالت دودوئی خطی با پیوند آمیخته-مقیاس نرمال $(BSSMM - SMN)$ به صورت

$$Z_t = \mathbf{X}'_t \beta + \theta_t + u_t^\dagger v_t,$$

$$\theta_t = \delta \theta_{t-1} + \tau \varepsilon_t,$$

$$U_t \sim f(u_t | v),$$

تعریف می شود که در آن جملات خطای v_t و ε_t مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند و $f(u_t | v)$ چگالی آمیختگی است (آبانتو-واله و دی [۱]).

سری زمانی $\{Y_t \sim \text{ber}(\pi_t); t = 1, \dots, T\}$ با همبستگی پیاپی و بیش پراکنش در مشاهدات را در نظر بگیرید که به متغیرهای کمکی زمان-متغیر $\mathbf{X}_t = (X_{t1}, \dots, X_{tk})'$ و متغیرهای حالت p بعدی θ_t بستگی دارد. مدل فضا-حالت خطی تعمیم یافته به صورت

$$\pi_t = F(\mathbf{X}'_t \beta + \mathbf{G}'_t \theta_t),$$

معرفی می شود که در آن معادله‌ی حالت $\theta_t = \mathbf{H}_t \theta_{t-1} + \mathbf{w}_t$ ، $\mathbf{w}_t \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{W}_t)$ که در آن $\pi_t = p(Y_t = 1 | \theta_t, \mathbf{X}_t, \mathbf{G}_t)$ برداری $p \times p$ انتقال بعدی، β بردار k بعدی ضرایب رگرسیونی، \mathbf{H}_t ماتریس انتقال $p \times p$ بعدی و \mathbf{W}_t ماتریس کواریانس خطای آماری \mathbf{w}_t است. $\text{ber}(\cdot)$ نماد توزیع برنولی، $N_p(\cdot, \cdot)$ توزیع نرمال p متغیره و F وارون تابع پیوند است.

۳ رهیافت مونت کارلوی زنجیر مارکوفی

اگر $|\delta| < 1$ آنگاه معادله‌ی حالت مانا است. همچنین فرض کنید $\theta_0 \sim N[0, \tau^2(1 - \delta^2)^{-1}]$ توزیع اولیه‌ی حالت باشد. محاسبه‌ی درستنمایی به سادگی امکان پذیر نیست بنابراین با استفاده از اصل داده افزایی در رهیافت بیزی و با تعریف $\Psi = (\beta', \delta, \tau^2, v)'$ ، $\mathbf{Y}_{1:T} = (\mathbf{Z}_{1:T}, \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T})'$ ، $\mathbf{Z}_{1:T} = (Z_1, \dots, Z_T)'$ ، $(Y_1, \dots, Y_T)'$ ، $\theta_{0:T} = (\theta_0, \dots, \theta_T)'$ و $\mathbf{U}_{1:T} = (U_1, \dots, U_T)'$ چگالی پسین توأم پارامترها و متغیرهای پنهان به صورت

تعریف ۱.۲. فرض کنید برای $t = 1, \dots, T$ ، $Y_t \sim \text{ber}(\pi_t)$ و Z_1, \dots, Z_T متغیرهای پنهان باشند که Y_t از رابطه‌ی یک به یک بین $Y_t = 1$ و $Y_t > 0$ تولید شده باشد و

$$\begin{aligned} \pi_t &= p(Y_t = 1 | \theta_t, \mathbf{X}_t, \beta) \\ &= p(Z_t > 0 | \theta_t, \mathbf{X}_t, \beta) \\ &= F_{SMN}(\mathbf{X}'_t \beta + \theta_t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_t^\dagger [\mathbf{X}'_t \beta + \theta_t]) dH(u_t) \end{aligned}$$

$$\pi(\mathbf{Z}_{1:T}, \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T}, \Psi | \mathbf{Y}_{1:T})$$

$$\propto f(\mathbf{Z}_{1:T} | \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T}, \Psi, \mathbf{Y}_{1:T}) f(\theta_{0:T} | \Psi)$$

$$\times f(\mathbf{U}_{1:T} | \Psi) \pi(\Psi),$$

(۱) تعریف شود که در آن F_{SMN} تابع توزیع تجمعی SMN

به دست می‌آید که در آن

$$\mathbf{U}_{1:T}^{(i+1)} \sim f(\mathbf{U}_{1:T} | \theta_{1:T}^{(i+1)}, \Psi^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:T}^{(i+1)}, \mathbf{Y}_{1:T}) \quad -۴$$

تولید شود.

انتخاب گردد.

$$\Psi^{(i+1)} \sim f(\Psi | \theta_{1:T}^{(i+1)}, \mathbf{U}_{1:T}^{(i+1)}, \mathbf{Z}_{1:T}^{(i+1)}, \mathbf{Y}_{1:T}) \quad -۵$$

$$f(\mathbf{Z}_{1:T} | \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T}, \Psi, \mathbf{Y}_{1:T}) = \prod_{t=1}^T [I(Z_t \geq 0)I(Y_t = 1) + I(Z_t < 0)I(Y_t = 0)] \times \phi(Z_t | \mathbf{X}'_t \beta + \theta_t, u_t),$$

۶- با قرار دادن $i = i + 1$ به مرحله ۲ برمی‌گردد و تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد.

توزیع پسین شرطی کامل پارامترهای رگرسیونی β به صورت $\beta | \mathbf{Z}_{1:T}, \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T} \sim N_k(\beta_1, \Sigma_1)$ ، که در آن $\beta_1 = \Sigma_1 [\Sigma_0^{-1} \beta_0 + \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t (Z_t - \theta_t) U_t]$ و $\Sigma_1 = [\Sigma_0^{-1} + \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t U_t]^{-1}$. کامل پارامتر خودهمبستگی به صورت

$\pi(\delta | \theta, \tau^2) \propto Q(\delta) \exp\{-\frac{a_\delta}{\tau^2} (\delta - \frac{b_\delta}{a_\delta})^2\} I(|\delta| < 1)$ ، است که در آن

$$Q(\delta) = \sqrt{1 - \delta^2} \exp\{-\frac{1}{\tau^2} [(1 - \delta^2)\theta^2]\},$$

$$a_\delta = \sum_{t=1}^T \theta_{t-1}^2 + \frac{\tau^2}{\sigma_\delta^2},$$

$$f(\theta_{0:T} | \Psi) = \phi(\theta_0 | 0, \frac{\tau^2}{1 - \delta^2}) \prod_{t=1}^T \phi(\theta_t | \delta \theta_{t-1}, \tau^2),$$

$$f(\mathbf{U}_{1:T} | \Psi) = \prod_{t=1}^T f(u_t | v) \cdot \phi(\cdot | \mu, \sigma^2)$$

تابع چگالی توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 و I تابع نشانگر است. توزیع پیشین توأم پارامترهای مدل به صورت $\pi(\Psi) \propto \pi(\beta) \pi(\delta) \pi(\tau^2) \pi(v)$ است که در آن $\delta \sim N_{(-1,1)}(\delta_0, \sigma_\delta^2)$ ، $\beta \sim N_k(\beta_0, \Sigma_0)$ و $\tau^2 \sim IG(n_0/\tau, T/\tau)$ و متغیره، $N_{(a,b)}(\cdot, \cdot)$ توزیع نرمال بریده شده روی (a, b) و $IG(\cdot, \cdot)$ توزیع وارون-گاما است. محاسبه‌ی رابطه‌ی (۱) به سادگی امکان‌پذیر نیست بنابراین در ادامه با استفاده از توزیع‌های پسین شرطی کامل و به کارگیری الگوریتم ۱ از $\theta_{0:T}$ و $\mathbf{U}_{1:T}, \mathbf{Z}_{1:T}, \Psi$ نمونه تصادفی تولید می‌شود.

الگوریتم ۱:

۱- با $i = 0$ مقادیر اولیه برای پارامترهای $\Psi^{(i)}$ و متغیرهای پنهان $\theta_{0:T}^{(i)}$ و $\mathbf{U}_{1:T}^{(i)}$ تعریف شود.

۲- تولید $\mathbf{Z}_{1:T}^{(i+1)} \sim f(\mathbf{Z}_{1:T} | \theta_{0:T}^{(i)}, \mathbf{U}_{1:T}^{(i)}, \Psi^{(i)}, \mathbf{Y}_{1:T})$ شود.

۳- تولید $\theta_{0:T}^{(i+1)} \sim f(\theta_{0:T} | \mathbf{U}_{1:T}^{(i)}, \Psi^{(i)}, \mathbf{Z}_{1:T}^{(i+1)}, \mathbf{Y}_{1:T})$ شود.

و

$$b_\delta = \sum_{t=1}^T \theta_{t-1} \theta_t + \delta_0 \frac{\tau^2}{\sigma_\delta^2}.$$

با توجه به این که $\pi(\delta | \theta, \tau^2)$ شکل مشخصی ندارد بنابراین با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز و با در نظر گرفتن $(\frac{b_\delta}{a_\delta}, \frac{\tau^2}{a_\delta})$ به عنوان چگالی پیشنهادی نمونه‌گیری انجام می‌شود. توزیع پسین شرطی کامل τ^2 به صورت $\tau^2 | \theta_{0:T}, \delta \sim IG(\frac{T_1}{\tau}, \frac{S_1}{\tau})$ است که

در مدل $BSSMM - S$ با فرض اینکه $U_t \sim Beta(v, 1)$ توزیع پسین شرطی کامل U_t به صورت $U_t | Z_t, h_t, \theta \sim G_{v < U_t < 1}(v + \frac{1}{\psi}, \frac{[Z_t - \mathbf{X}'_t \beta - \theta_t]^2}{\psi})$.

یعنی توزیع گاما بریده شده از راست روی $(0, 1)$ حاصل می‌شود. همچنین با در نظر گرفتن پیشین $v \sim G(a_v, b_v)$ توزیع پسین شرطی کامل v به صورت

$$v | \sim G_{v > 1}(T + a_v, b_v - \sum_{t=1}^T \text{Log} U_t),$$

به دست می‌آید که توزیع گاما بریده شده از چپ می‌باشد.

در مدل $BSSMM - VG$ با تعریف $U_t \sim IG(\frac{v}{\psi}, \frac{v}{\psi})$ توزیع پسین شرطی کامل U_t به صورت

$$\pi(U_t | Z_t, h_t, v) \propto u_t^{-\frac{v}{\psi} + \frac{1}{\psi} - 1} \exp\{-\frac{1}{\psi}[u_t(Z_t - \mathbf{X}'_t \beta - \theta_t)]^2 + \frac{v}{u_t}\},$$

است که توزیع وارون-گاما تعمیم یافته نامیده می‌شود و

$$GIG(-\frac{v}{\psi} + \frac{1}{\psi}, (Z_t - \mathbf{X}'_t \beta - \theta_t)^2, v)$$

نمایش داده می‌شود. همچنین اگر $v \sim G_{0 < v < 40}(a_v, b_v)$ آن‌گاه توزیع پسین شرطی کامل v به صورت

$$\begin{aligned} \pi(v | \mathbf{Y}_{1:T}, \mathbf{h}_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T}) &\propto \frac{1}{[\Gamma(\frac{v}{\psi})]^T} (\frac{v}{\psi})^{\frac{Tv}{\psi}} v^{a_v - 1} \\ &\times e^{-\frac{v}{\psi} \sum_{t=1}^T [(\frac{1}{u_t} + \text{Log} u_t) + 2b_v]} I_{(0 < v \leq 40)}. \end{aligned}$$

به دست می‌آید که شکل مشخصی ندارد و مشابه با مدل

در آن $S_1 = S_0 + [(1 - \delta^2)\theta_0^2]$ و $T_1 = T_0 + T + 1$ $\sum_{t=1}^T (\theta_t - \delta\theta_{t-1})^2$ با توجه به استقلال متغیرهای پنهان $\mathbf{Z}_{1:T}$ به شرط $\theta_{0:T}$ و $\mathbf{U}_{1:T}$ توزیع شرطی کامل $\mathbf{Z}_{1:T}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{Z}_{1:T} | \mathbf{Y}_{1:T}, \theta_{0:T}, \mathbf{U}_{1:T}, \beta) &= \prod_{t=1}^T \pi(Z_t | \theta_t, U_t, \beta) \\ &= (\psi \pi u_t)^{-\frac{T}{\psi}} \exp\{-\frac{1}{\psi} \sum_{t=1}^T [z_t - (\mathbf{X}'_t \beta + \theta_t)]^2\} \\ &\times \prod_{t=1}^T [\{I(Z_t \geq 0)I(Y_t = 1) + I(Z_t < 0)I(Y_t = 0)\}], \end{aligned}$$

که چگالی نرمال بریده شده بر اساس مقادیر Y_t است.

در مدل $BSSMM - T$ با تعریف $U_t \sim G(\frac{v}{\psi}, \frac{v}{\psi})$ توزیع پسین شرطی کامل U_t عبارتست از

$$U_t | Z_t, \theta_t, \beta, v \sim G(\frac{v+1}{\psi}, \frac{[Z_t - \mathbf{X}'_t \beta - \theta_t]^2 + v}{\psi}),$$

و با فرض این‌که

$$\pi(v) \propto (\frac{v}{v+3})^{\frac{1}{\psi}} \{\psi'(\frac{v}{\psi}) - \psi'(\frac{v+1}{\psi}) - \frac{2(v+3)}{v(v+1)^2}\}^{\frac{1}{\psi}},$$

که در آن $\psi'(a) = \frac{d}{da} \psi(a)$ تابع سه‌گاما و $\psi(a) = \frac{d}{da} \text{Log}[\Gamma(a)]$ تابع دوگاما است، با شرط $2 < v \leq 40$ توزیع پسین شرطی کامل v به صورت

$$\pi(v | \mathbf{U}_{1:T}) \propto \pi(v) (\frac{v}{\psi})^{\frac{Tv}{\psi}} [\Gamma(\frac{v}{\psi})]^{-T} e^{-\frac{v}{\psi} \sum_{t=1}^T (u_t - \text{Log} u_t)}$$

حاصل می‌شود که شکل مشخصی ندارد بنابراین برای نمونه‌گیری از v با استفاده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز با چگالی پیشنهادی $N_{(2 < v \leq 40)}(\mu_v, \tau_v^2)$ انجام می‌شود. $\mu_v = x - \frac{q'(x)}{q''(x)}$ و $\tau_v^2 = [-q''(x)]^{-1}$

۳- $\xi^{(i)} \sim Mult(\omega_{t+1}^{(i)})$ تولید شود که در آن

$$\omega_{t+1}^{(i)} \propto [W_{t+1}^{(i)}]^{Y_{t+1}} [1 - W_{t+1}^{(i)}]^{1 - Y_{t+1}}$$

۴- $Z_{t+1}^{(i)} \sim I(Y_{t+1} = 1)N_{(0, \infty)}(f_{t+1}^{\xi^{(i)}}, Q_{t+1}^{\xi^{(i)}}) + I(Y_{t+1} = 0)N_{(-\infty, 0)}(f_{t+1}^{\xi^{(i)}}, Q_{t+1}^{\xi^{(i)}})$ تولید شود.

۵- $(\theta_t, \theta_{t+1})^{(i)}$ از $V_t^{\xi^{(i)}} \mathbf{Z}_{1:t+1}^{(i)}$ نمونه‌گیری شود.

۶- $\theta_t^{(i)}$ از توزیع $N(\frac{n_t^{(i)}}{N_t^{(i)}}, \frac{1}{N_t^{(i)}})$ استخراج شود که در آن

$$n_t^{(i)} = \frac{\delta(Z_{t+1}^{(i)} - \mathbf{X}'_{t+1}\beta)}{U_{t+1}^{-1}\xi^{(i)} + \tau^2} + \frac{m_t^{\xi^{(i)}}}{C_t^{\xi^{(i)}}},$$

$$N_t^{(i)} = \frac{\delta^2}{U_{t+1}^{-1}\xi^{(i)} + \tau^2} + \frac{1}{C_t^{\xi^{(i)}}}.$$

۷- $\theta_{t+1}^{(i)}$ از توزیع $N(\frac{k_t^{(i)}}{K_t^{(i)}}, \frac{1}{K_t^{(i)}})$ انتخاب شود که در آن

$$k_t^{(i)} = U_{t+1}^{\xi^{(i)}}(Z_{t+1}^{(i)} - \mathbf{X}'_{t+1}\beta) + \frac{\delta\theta_t^{(i)}}{\tau^2},$$

$$K_t^{(i)} = \frac{\delta^2}{U_{t+1}^{-1}\xi^{(i)} + \tau^2} + \frac{1}{C_t^{\xi^{(i)}}}.$$

۸- عبارت $s_{t+1}^{\theta^{(i)}}$ با استفاده از رابطه‌های (۲) و (۳) جایگزین گردد.

در پایان درستنمایی پیش‌بین $p(Y_{t+1} | \mathbf{Y}_{1:t}, \Psi)$ با

$$p(Y_{t+1} | \mathbf{Y}_{1:t}, \Psi) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [W_{t+1}^{(i)}]^{Y_{t+1}} [1 - W_{t+1}^{(i)}]^{1 - Y_{t+1}}$$

به‌نگام می‌شود. در پایان k مرحله چگالی پیش‌بین پیش

$BSSMM - T$ با در نظر گرفتن $N(\tau < v \leq \tau_0)(\mu_v, \tau_v)$ عنوان چگالی پیشنهادی از الگوریتم متروپلیس-هستینگز استفاده می‌شود.

بررسی برازش مدل پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با مدل‌های رقیب با به کارگیری لگاریتم امتیاز پیش بین (LPS) انجام می‌گردد. میانگین لگاریتم امتیاز پیش بین در یک گام از فرآیند MCMC به صورت

$$LPS = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{Logp}(Y_t | \mathbf{Y}_{1:t-1}, \hat{\Psi}),$$

است که در آن $p(Y_t | Y_1, \dots, Y_{t-1}, \hat{\Psi})$ شکل مشخصی ندارد. بنابراین با استفاده از روش‌های عددی مانند الگوریتم PL محاسبه می‌شود. هر اندازه LPS کمتر باشد مدل مناسب‌تر است (کانتاس و همکاران [۵]). توزیع پسین به صورت $\theta_{t+1} | s_t^\theta, \Psi \sim N(m_{t+1}, C_{t+1})$ است که در آن

$$m_{t+1} = (1 - A_{t+1})a_{t+1} + A_{t+1}(Z_{t+1} - f_{t+1}), \quad (2)$$

$$C_{t+1} = (1 - A_{t+1})R_{t+1}, \quad (3)$$

همچنین $R_{t+1} = \delta^2 C_t + \tau^2$ ، $a_{t+1} = \delta m_t$ ، $A_{t+1} = R_{t+1}/Q_{t+1}$ ، $Q_{t+1} = R_{t+1} + f_{t+1} = \mathbf{X}'_{t+1}\beta + a_{t+1}$ و U_{t+1}^{-1} . بنابراین مراحل روش PL در الگوریتم به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

الگوریتم ۲: برای $i = 1, \dots, N$ مراحل زیر انجام شود.

۱- از $U_{t+1}^{(i)} \sim p(U_{t+1} | v)$ نمونه‌گیری شود.

۲- $V_t^{(i)} = (U_{t+1}^{(i)}, s_t^{\theta^{(i)}})$ تعریف گردد.

$\beta \sim \tau^2 \sim IG(2/5, 0/125)$ ، $N_{(-1,1)}(0/95, 100)$
 $N_2(\beta_0, \Sigma_0)$ تعریف می‌شوند که در آن $\beta_0 = 0$ و $\Sigma_0 = I_2$
 500^2 . همچنین فرض کنید توزیع پیشین پارامتر شکل
 در $BSSMM - VG$ و $BSSMM - S$ به صورت $v \sim$
 $G(5/0, 0/8)$ و برای $BSSMM - T$ توزیع پیشین v
 ناآگاهی بخش است. در هر مورد شبیه‌سازی $McMC$
 50000 تکرار و 10000 دور زیر در نظر گرفته می‌شود.
 برای کاهش خودهمبستگی بین مقادیر موفقیت در زنجیر
 شبیه‌سازی فقط هر بیستمین مقادیر زنجیر ذخیره می‌گردد.
 نتایج در جدول ۱ گزارش داده شده‌اند. با توجه به این‌که
 $CD \in (-1/96, 1/96)$ بنابراین بر اساس آماره‌ی CD
 گیوک [۴] دنباله‌ی خروجی $McMC$ مانا می‌باشد. عامل
 ناکارایی، که به صورت $IF = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s$ تعریف
 می‌شود و در آن ρ_s خودهمبستگی نمونه در تأخیر s است،
 میزان موفقیت آمیز بودن آمیختگی زنجیر $McMC$ را
 اندازه‌گیری می‌کند. با توجه به مقادیر IF در جدول ۱
 مشاهده می‌شود که الگوریتم به کار رفته آمیختگی خوبی
 از زنجیر $MCMC$ را فراهم می‌کند.

در همه‌ی مدل‌ها میانگین پسین δ بزرگتر از $0/93$
 است که نشان دهنده‌ی استواری بالای پارامتر اتورگرسیو
 برای متغیرهای حالت و بنابراین در سری‌های زمانی
 دودوئی است. میانگین‌های پسین τ^2 بین $0/27$ و
 $0/34$ می‌باشند. نتایج پارامتر شکل v در مدل‌ها
 نشان می‌دهد که اندازه‌ی خطای متغیرهای آستانه‌ای Z_t
 توسط توزیع با دم‌های سنگین‌تر بهتر نشان داده می‌شود،
 بنابراین پیوندهای آمیخته-مقیاس نرمال به کار گرفته
 شده مناسب‌تر از پیوند پروبیت هستند. به دلیل آن‌که
 فاصله اعتبار 95 درصد متناظر β_1 شامل مقدار صفر
 است بنابراین X_{t1} تأثیری بر متغیر پاسخ ندارد. اما تأثیر
 X_{t2} به‌طور آماري معنادار است و مقدار منفی میانگین

رو $p(Z_{t+k} | Y_{1:t})$ با استفاده از انتگرال‌گیری عبارت

$$p(Z_{t+k} | \theta_{T+k}, U_{T+k}, \Psi) p(\theta_{T+k} | \Psi, Y_{1:t}) \\ \times p(U_{T+k} | \Psi) p(\Psi | Y_{1:t})$$

نسبت به $d\theta_{T+k} dU_{T+k} d\Psi$ که در آن

$$p(\theta_{T+k} | \Psi, Y_{1:t}) =$$

$$\int [p(\theta_{T+k} | \Psi, \theta_{T+k-1}) p(\theta_{T+k-1} | \Psi, Y_{1:t})] d\theta_{T+k-1}$$

محاسبه می‌گردد. قابل ذکر است که محاسبه‌ی این
 انتگرال‌ها با استفاده از تقریب مونت کارلو به سادگی
 امکان‌پذیر است.

۴ تحلیل داده‌های خواب نوزادان

در این بخش داده‌های خواب نوزادان برگرفته از استوفر
 و همکاران [۶] تحلیل می‌شوند. در این داده‌ها $t =$
 $1, \dots, 120$ و اگر کودک در طول دقیقه‌ی t در وضعیت
 خواب REM قرار بگیرد آن‌گاه $y_t = 1$ و در غیر این
 صورت $y_t = 0$ می‌باشد. سی-زادو و سانگ [۲] نشان
 دادند که این احتمال به دو متغیر کمکی X_{t1} (تعداد
 حرکات بدن در طول دقیقه‌ی t) و X_{t2} (تعداد حرکات
 بدن در طول دقیقه‌ی t نه به خاطر مکیدن شیر) وابسته
 است. احتمال شرطی قرار گرفتن در خواب REM را به
 صورت

$$\pi_t = p(Y_t = 1 | \beta, \theta_t, U_t) \\ = F_{SMN}(\beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \theta_t)$$

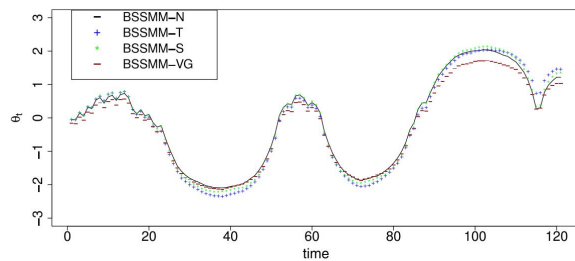
در نظر بگیرید که در آن معادله‌ی حالت فرآیند
 $AR(1)$ است. توزیع‌های پیشین به صورت $\delta \sim$

پسین β_2 نشان می‌دهد که تعداد زیاد حرکات بدن نه به خاطر مکیدن شیر، احتمال اینکه کودک در وضعیت خواب REM قرار گیرد را کاهش می‌دهد و این موضوع کاملاً طبیعی است.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

کلاس مدل‌های آمیخته فضا-حالت دودویی با پیوندهای آمیخته-مقیاس نرمال در مدل‌بندی سری‌های زمانی دودویی که شامل همبستگی پیاپی بوده و در مشاهدات آن بیش‌پراکنش وجود دارد، بسیار مناسب و پرکاربرد است. این کلاس از مدل‌ها در بیان تغییرات متغیر پاسخ انعطاف‌پذیر هستند و شرایط انجام استنباط استوار را فراهم می‌کنند. همچنین این مدل‌ها به دلیل به کار بردن متغیرهای کمکی و پیشگوه‌های تصادفی و غیرتصادفی، قابلیت پیش‌بینی بهتری دارند.

شکل ۱ میانگین پسین هموار شده‌ی متغیرهای حالت را نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که مدل‌های برازش داده شده متفاوت هستند.



شکل ۱: میانگین پسین هموار شده متغیر حالت داده‌های خواب نوزادان

مدل $BSSMM-S$ دارای مقدار LPS ، $۰/۴۳۵۶$ است بنابراین بهترین مدل، $BSSMM-S$ می‌باشد. برای بررسی قابلیت پیش‌بینی مدل‌های $BSSMM-N$ و $BSSMM-S$ ، داده‌های خواب نوزادان به دو گروه تقسیم می‌شوند. گروهی با ۱۱۰ مشاهده و دیگری با ۱۰ مشاهده مشخص می‌شوند. ابتدا گروه اول مشاهدات تحلیل می‌شوند و حالت‌های خارج از نمونه شبیه‌سازی می‌گردند. با استفاده از شبیه‌سازی $MCMC$ امکان مقایسه‌ی احتمال شرطی موفقیت π_{t+k} برای ۱۰ مشاهده‌ی دیگر در هر یک از مدل‌ها وجود دارد. معیار دیگر استفاده از مانده-نما، $r_t = Y_t - \pi_t$ و محاسبه‌ی میانگین توان دوم خطای پیش‌بین به صورت

$$MSEF = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (Y_{t+k} - \pi_{t+k})^2,$$

جدول ۱: میانگین پسین در سطر اول، کران پایین فواصل اعتبار ۹۵ درصد در سطر دوم، کران بالای فواصل اعتبار ۹۵ درصد در سطر سوم، خطای MC در سطر چهارم، آماره CD در سطر پنجم و عامل ناکارایی در سطر ششم.

VG	S	T	N	
۰/۳۱۸۵	-۰/۰۵۵۰	-۰/۰۲۸۱	-۰/۰۴۷۹	
-۱/۷۱۹۲	-۲/۲۳۱۶	-۲/۳۳۰۰	-۱/۹۴۲۵	
۴/۴۲۰۶	۲/۰۱۵۷	۲/۵۲۵۶	۱/۶۷۷۰	
۰/۱۷۶۴	۰/۰۸۴۲	۰/۰۹۴۴	۰/۰۴۸۳	β_0
۱/۲۵	۰/۶۸	۱/۴۳	۱/۳۹	
۳۱/۴۳	۱۴/۰۳	۱۵/۰۸	۶/۰۴	
۰/۲۷۷۵	۰/۳۱۳۴	۰/۴۳۳۶	۰/۲۷۰۶	
-۰/۰۷۹۱	-۰/۰۹۴۲	-۰/۰۸۳۷	-۰/۰۸۳۳	
۰/۶۶۷۰	۰/۷۳۳۸	۱/۱۲۹۸	۰/۶۲۴۵	
۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۵۶	۰/۰۱۱۵	۰/۰۰۴۴	β_1
-۱/۲۷	۰/۳۷	-۰/۳۲	۰/۰۰	
۱/۲۹	۱/۳۳	۲/۹۷	۱/۱۲	
-۰/۴۶۴۷	-۰/۵۱۹۶	-۰/۶۷۵۵	-۰/۴۶۷۹	
-۰/۹۳۳۶	-۱/۰۵۸۸	-۱/۵۰۴۸	-۰/۹۵۲۵	
-۰/۰۲۰۷	-۰/۰۳۷۲	۰/۰۸۶۶	-۰/۰۲۵۷	
۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۶۸	۰/۰۱۳۱	۰/۰۰۵۶	β_2
۱/۲۹	-۰/۷۲	۰/۲۸	۰/۱۱	
۱/۳۰	۱/۳۳	۲/۶۲	۱/۱۲	
۰/۹۴۲۴	۰/۹۳۴۹	۰/۹۴۰۲	۰/۹۳۳۶	
۰/۸۵۱۲	۰/۸۳۴۱	۰/۸۵۲۸	۰/۸۳۳۳	
۰/۹۹۲۲	۰/۹۸۸۷	۰/۹۸۹۰	۰/۹۸۶۸	
۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	δ
-۰/۱۸	-۰/۴۶	۰/۲۱	-۰/۷۲	
۵/۴۷	۱/۷۲	۲/۲۵	۱/۶۷	
۰/۲۷۸۹	۰/۳۵۶۶	۰/۳۴۲۳	۰/۳۰۶۰	
۰/۰۵۱۲	۰/۰۶۶۷	۰/۰۶۲۸	۰/۰۶۶۳	
۰/۹۹۸۰	۱/۲۴۵۶	۱/۱۸۰۷	۱/۰۱۶۹	
۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۰۶	۰/۰۱۴۹	τ^2
۱/۵۱	۰/۱۴	-۱/۲۷	۰/۵۳	
۱۱/۶۶	۶/۸۵	۶/۸۲	۷/۰۴	
۶/۲۳۹۶	۶/۴۰۰۲	۷/۵۶۲۱	-	
۱/۷۸۰۰	۲/۰۳۰۱۰	۲/۰۴۱۰	-	
۱۲/۸۰۴۰	۱۳/۲۶۴۰	۳۰/۶۲۹۰	-	
۰/۱۱۱۸	۰/۱۲۶۵	۰/۴۹۳۱	-	v
۱/۶۵	-۱/۷۴	-۰/۵۶	-	
۳/۱۵	۳/۹۴	۹/۱۹	-	

مراجع

- [۶] Stoffer D. S., Scher M. S., Richardson G. A., Day N.L. and Coble P. A. (1988). A Walsh-Fourier analysis of the effects of moderate maternal alcohol consumption on neonatal sleep-state cycling. *J Amer Stat Assoc*, 83, 954-963.
- [۱] Abanto-Valle, C. A. and Dey, D. (2014). State space mixed models for binary responses with scale mixture of normal distributions links. *Computational Statistics and Data Analysis*, 71, 274-287.
- [۲] Czado, C. and Song, P. X. K. (2008). State space mixed models for longitudinal observations with binary and binomial responses. *Statistical Papers*, 49, 691-714.
- [۳] Choy, S. T. B. and Chan, J. S. K. (2008). Scale mixture distributions in statistical modeling. *Aust. N. Z. J. Statistics*, 50(2), 135-146.
- [۴] Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. In: Bernardo, J. M., Berger, J. O., Dawid, A. P. and Smith, A. F. M. (Eds.). *Bayesian Statistics*. Clarendon Press, Oxford, UK, 4, 577-586.
- [۵] Kantas, N., Doucet, A., Singh, S. S., Maciejowski, J. and Chopin, N. (2015). On particle methods for parameter estimation in state-space models. *Statistical science*, 30(3), 328-351.