

# توزیع وایبول- پواسون نمایی شده و کاربردهای آن

آنیته عبدالمهی نانوایشه  
گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

## چکیده

در مقاله حاضر، یک توزیع چهار پارامتری جدید ارائه شده است که تابع نرخ خطر آن دارای انعطاف زیادی است و به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای توزیع می‌تواند هر یک از حالت‌های صعودی، نزولی یا وانی شکل را اختیار کند. این توزیع به توزیع وایبول - پواسون نمایی شده (EWP)، معروف است. توزیع جدید ارائه شده، در مسائل مخاطره‌ای کاربرد دارد و با ترکیب توزیع پواسون و وایبول نمایی شده (EW) به دست می‌آید. این توزیع شامل چندین زیرمدل طول عمر مانند توزیع‌های نمایی- پواسون تعمیم‌یافته (GEP)، وایبول - پواسون کامل (CWP)، نمایی- پواسون کامل (CEP)، رایلی- پواسون نمایی شده (ERP) و رایلی- پواسون (RP) می‌باشد. در این مقاله ویژگی‌هایی از توزیع جدید، مانند تابع چگالی احتمال، قابلیت اطمینان و تابع نرخ خطر، چندک‌ها و گشتاورها را ارائه خواهیم نمود. زیر مدل‌هایی از توزیع وایبول - پواسون نمایی شده به‌طور جزئی مطالعه می‌شوند و در پایان کاربردهایی از داده‌های واقعی ارائه خواهد شد تا انعطاف‌پذیری و کارایی توزیع جدید را نشان دهند.

واژه‌های کلیدی: توزیع وایبول نمایی شده، گشتاورهای وزنی احتمال، طول عمر باقیمانده.

## ۱ مقدمه

پواسون نمایی شده<sup>(۲)</sup> (EP)، نمایی لگاریتمی<sup>(۳)</sup> (EL)،

سری‌های توانی نمایی<sup>(۴)</sup> (EPS)، وایبول هندسی<sup>(۵)</sup> (WG)

و سری‌های توانی وایبول<sup>(۶)</sup> (WPS)، توسط آدامیدیس و

لوکاس [۲]، کاس [۲۳]، طهماسبی و رضایی [۳۸]،

چپکندی و گنجعلی [۱۰]، بارتو- سوزا و همکاران [۷] و

توزیع وایبول و وایبول نمایی شده، در بسیاری از مسائل طول عمر و قابلیت اطمینان کاربرد دارند. اخیراً تلاش‌های بسیاری برای تعریف یک خانواده جدید از توزیع‌های احتمال صورت گرفته است که محدود به خانواده‌های خوش تعریف باشند و به‌طور هم‌زمان انعطاف‌پذیری زیادی را در مدل‌بندی داده‌های عملی فراهم کند. توزیع‌های نمایی هندسی<sup>(۱)</sup> (EG)،

<sup>۲</sup> Exponential- Poisson

<sup>۳</sup> Exponential- logarithmic

<sup>۴</sup> Exponential- power series

<sup>۵</sup> Weibull- geometric

<sup>۶</sup> Weibull- power series

<sup>۱</sup> Exponential- geometric

پیشنهاد شد. دلایل اصلی مناسب بودن توزیع EWP به شرح زیر است.

- این توزیع به علت انعطاف پذیری در بهبود حالت‌های مختلف تابع ریسک، مدلی با اهمیت می‌باشد که در مسائل گوناگونی از جمله در مدل‌بندی داده‌های طول عمر به‌کار گرفته می‌شود.

- این توزیع یک مدل مناسب در مسائل ریسکی دارای ریسک‌های نهفته که هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره عامل شکست وجود ندارد و تنها، مقدار طول عمر ماکسیمم مولفه‌ها در میان تمامی ریسک‌ها مشخص است، می‌باشد.

- این توزیع تقارن معقولی برای داده‌های چوله فراهم می‌کند که به‌درستی توسط دیگر توزیع‌ها قابل ارائه نیست و مدلی مناسب در سطوح مختلف مانند سلامت عمومی، علوم آماری، مطالعات بیولوژیکی، مردم‌نگاری و قابلیت اطمینان صنعتی است.

## ۲ توزیع وایبول نمایی شده (EW)

توزیع EW توسط ماد هولکار و سریواستاوا [۳۲] معرفی شد که تعمیمی از خانواده وایبول است و شامل توزیع‌هایی به صورت وانی شکل و نرخ خطر تک نمایی در کنار کلاس‌های عریض از نرخ‌های خطر یکنواخت است. کاربردهایی از توزیع EW در مطالعات قابلیت اطمینان و بقا توسط هولکار و همکاران [۳۳]، ماد هولکار و هاستن [۳۴]، گوپتا و کاندو [۱۹]، ناصر و عیسی [۳۶] و چودهاری [۱۲] ارائه شد. متغیر تصادفی X دارای توزیع

موریاس و بارتو- سوزا و همکاران [۳۱] به‌ترتیب معرفی و مطالعه شدند. بارتو- سوزا و کری باری- نتو [۵] و لوزادا و همکاران [۲۴] توزیع‌های نمایی-پواسون نمایی شده (EEP<sup>۷</sup>) و هندسی نمایی کامل (CEG<sup>۸</sup>) را معرفی کردند که توزیع EEP تعمیمی از توزیع EP و توزیع CEG که تعمیمی از مدل EG است، توسط آدامیدیس و لوکاس [۲] مطرح شد. اخیراً کانکو و همکارانش [۹] توزیع طول عمر نمایی- پواسون دوپارامتری با نرخ خطر افزایشی را بیان کردند. محمودی و جعفری [۲۵] توزیع سری‌های توانی- نمایی تعمیم‌یافته (GEP<sup>۹</sup>) را با ترکیب توزیع نمایی تعمیم‌یافته (GE<sup>۱۰</sup>) و توزیع سری‌های توانی را ارائه کردند. همچنین توزیع‌های وایبول - لگاریتمی نمایی شده (EWL<sup>۱۱</sup>)، وایبول - هندسی نمایی شده (EWG<sup>۱۲</sup>) و سری‌های توانی- وایبول نمایی شده (EWP<sup>۱۳</sup>)، توسط محمودی و سپهدار [۲۶] و محمودی و شیران [۲۷، ۲۸] معرفی و تجزیه و تحلیل شد. در این مقاله، توزیع چهار پارامتری جدیدی به نام توزیع EWP که شامل زیرمدل‌هایی خاص از توزیع‌های (GEP<sup>۱۴</sup>)، (CWP<sup>۱۵</sup>)، (CEP<sup>۱۶</sup>)، (ERP<sup>۱۷</sup>) و (RP<sup>۱۸</sup>) می‌باشند نسبت به سایر مدل‌ها

<sup>۷</sup>Exponentiated exponential-Poisson

<sup>۸</sup>Complementary exponential-geometric

<sup>۹</sup>Generalized exponential-power series

<sup>۱۰</sup>Generalized exponential

<sup>۱۱</sup>Exponentiated Weibull-logarithmic

<sup>۱۲</sup>Gxponentiated Weibull-geometric

<sup>۱۳</sup>Exponentiated Weibull-Poisson

<sup>۱۴</sup>Generalized exponential-Poisson

<sup>۱۵</sup>Complementary Weibull-Poisson

<sup>۱۶</sup>Complementary exponential-Poisson

<sup>۱۷</sup>Exponentiated Rayleigh-Poisson

<sup>۱۸</sup>Rayleigh-Poisson

EW است اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد که  $\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)$  نشان دهنده تابع گاما می باشد برای جزئیات بیشتر ناصر و عیسی [۳۶] را ببینید.

$$F_X(x) = (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^\alpha, \quad x > 0 \quad (1)$$

که  $\alpha > 0$ ،  $\beta > 0$  و  $\gamma > 0$  تابع چگالی احتمال متناظر آن به صورت زیر می باشد

$$f_X(x) = \alpha \gamma \beta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\beta x)^\gamma} (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^{\alpha-1} \quad (2)$$

### ۳ توزیع وایبول - پواسون نمایی شده

تابع نرخ خطر و بقا از توزیع EW به ترتیب به صورت زیر فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع EW باشد که تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال آن به صورت (۱) و (۲) می باشد. فرض کنید  $X_1, \dots, X_N$  متغیرهای تصادفی مستقل و مشخص از توزیع وایبول نمایی شده باشند و N طبق توزیع پواسون بریده شده در صفر با تابع احتمال زیر باشد

$$S(x) = 1 - (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^\alpha,$$

$$h(x) = \alpha \gamma \beta^\gamma x^{\gamma-1} e^{-(\beta x)^\gamma} (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^{\alpha-1} \times \{[1 - (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^\alpha]\}^{-1},$$

$$P(N = n) = \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!(1 - e^{-\theta})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \theta > 0$$

K امین گشتاور حول صفر توزیع EW به صورت زیر بیان می شود

فرض کنید  $Y = \max(X_1, \dots, X_N)$ ، که تابع توزیع تجمعی  $Y|N = n$  به صورت زیر است

$$F_{Y|N=n}(y) = [1 - (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})]^{n\alpha},$$

$$E[X^k] = \alpha \beta^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma})+1)}.$$

توجه کنید که برای مقادیر صحیح مثبت از  $\alpha$ ، اندیس  $j$  در عبارت بالا در  $\alpha - 1$  متوقف شده و عبارت بالا به فرم بسته زیر تبدیل می شود

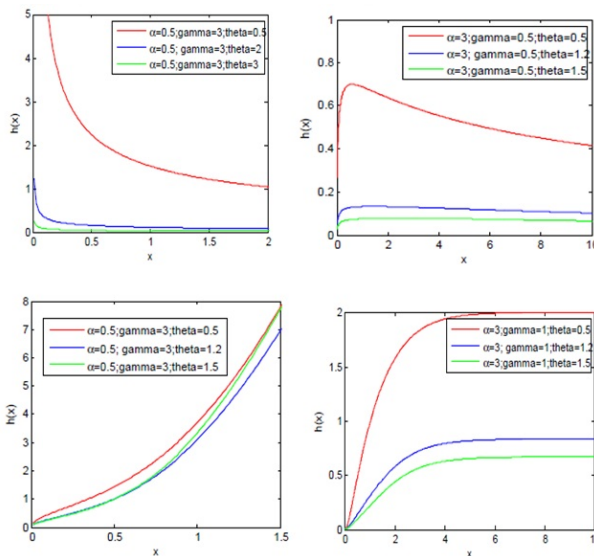
$$F(y) = \frac{e^\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha - 1}{e^\theta - 1}. \quad (3)$$

$$E[X^k] = \alpha \beta^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) A_K(\gamma)$$

$$A_K(\gamma) = 1 + \sum_{j=1}^{\alpha-1} (-1)^j \binom{\alpha-1}{j} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma})+1)},$$

$$K = 1, 2, 3$$

این توزیع جدید شامل تعدادی زیر مدل مثل توزیع های RP، ERP، GWP، GEP، CEP می باشد. ۴۱



شکل ۲: تابع نرخ خطر توزیع EWP برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف از  $(\alpha, \gamma, \theta)$

تابع چگالی احتمال توزیع EWP به صورت زیر می باشد

$$f(y) = \frac{\alpha \gamma^\theta \beta^\gamma y^{\gamma-1}}{e^\theta - 1} e^{-(\beta y)^\gamma} \times (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \quad (۴)$$

که  $\alpha, \beta, \gamma, \theta > 0$  هستند.

تابع های بقا و نرخ خطر توزیع وایبول نمایشی شده به ترتیب به صورت زیر می باشد

$$S(y) = 1 - \frac{e^\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha - 1}{e^\theta - 1} \quad (۵)$$

$$h(y) = \frac{\alpha \gamma^\theta \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma}}{e^\theta - e^\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \times (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1} e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \quad (۶)$$

نمودارهای تابع چگالی و نرخ خطر توزیع وایبول - پواسون نمایشی شده برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف از  $(\alpha, \gamma, \theta)$  در شکل های ۱ و ۲ به ترتیب ارائه شده اند.

$\theta > 0$  میل می کند به صورت زیر است

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} F(y) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{e^\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha - 1}{e^\theta - 1} = (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha$$

همانطور که مشخص است عبارت فوق همان تابع توزیع تجمعی توزیع وایبول نمایشی شده می باشد.

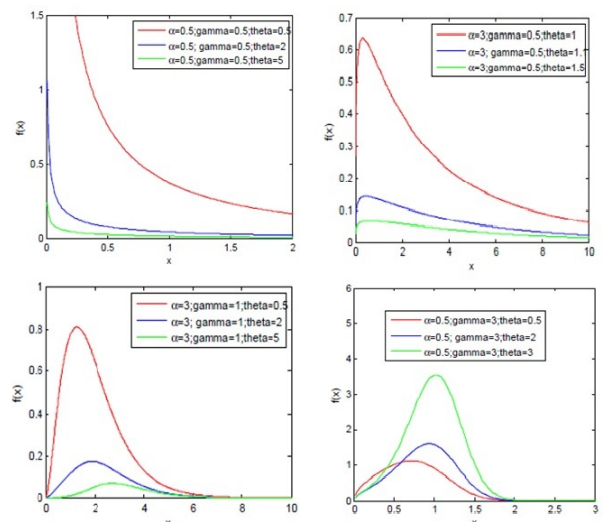
گزاره ۲ رفتار حدی تابع مخاطره توزیع EWP در رابطه (۶) به صورت زیر می باشد

i. برای  $0 < \gamma < 1$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \circ, \quad \lim_{y \rightarrow \circ} h(y) = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha \leq 1 \\ \circ & \alpha > 1 \end{cases}$$

شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع EWP برای  $\beta = 1$  و مقادیر مختلف از  $(\alpha, \gamma, \theta)$

گزاره ۱ توزیع حدی  $EWP(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$  زمانی که  $\theta \rightarrow \infty$



ii. برای  $\gamma = 1$

می باشد.

$$x_p = \frac{1}{\beta} [-\log(1 - (\frac{1}{\theta} \log(p(e^\theta - 1) + 1))^{\frac{1}{\alpha}})]^{\frac{1}{\gamma}} \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \beta, \quad \lim_{y \rightarrow 0} h(y) = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{\theta\beta}{e^\theta - 1} & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

که در تولید داده از توزیع EWP به کار گرفته می شود. حال تابع مولد گشتاور از توزیع EWP را به دست می آوریم. فرض کنید که  $Y \sim EWP(\alpha, \beta, \gamma, \theta)$  و  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$  باشد که برای  $X_i \sim EW(\alpha, \beta, \gamma), i = 1, 2, 3, \dots, n$  در این صورت

iii. برای  $\gamma > 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$ , برای همه مقادیر  $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \infty, \alpha > 0$

همانطور که مشخص است زمانی که  $0 < \gamma < 1$  و  $0 < \alpha \leq 1$  است، مقدار  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y)$  به عددی همگرا نشده و برابر بینهایت است و همچنین زمانی که  $0 < \gamma < 1$  و  $\alpha > 1$  است این مقدار به صفر همگراست. مقدار حدی  $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y)$  زمانی که  $y \rightarrow \infty$  میل می کند به عدد صفر همگرا می شود. برای  $\gamma = 1$  سه حالت رخ می دهد و با توجه به مقدار  $\alpha$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y)$  مقادیر ارائه شده در بالا را خواهد داشت و حد تابع خطر زمانی که  $y \rightarrow \infty$  میل می کند به مقدار  $\beta$  همگرا می شود. در حالت  $\gamma > 1$ , مقدار  $\lim_{y \rightarrow 0} h(y)$  زمانی که  $y \rightarrow 0$  میل می کند به عدد صفر همگراست و بالاخره برای همه مقادیر  $\alpha > 0$ , مقدار  $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y)$  به عددی همگرا نشده و برابر بینهایت است. (۸)

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) M_{x(n)}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} n \alpha \beta^{-k} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} (j+1)^{-((k/\gamma)+1)} \\ &= \frac{\alpha\theta}{(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{t^k \beta^k}{k!} \lim_{y \rightarrow 0} h(y) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha - 1}{j} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma}+1)\Gamma(\frac{k}{\gamma}+1))} \end{aligned}$$

## ۴ چندکها و گشتاورهای توزیع وایبول - پواسون نمایی شده

بخشی از رفتارهای بسیار مهم و ویژگی های یک توزیع مثل میل کردن، پراکندگی، چولگی و کشیدگی با استفاده از گشتاورها و چندکها می توانند مطالعه شوند. همچنین چندکهای یک توزیع در تولید داده از یک توزیع به کار می روند. چندک مرتبه  $p$  ام توزیع EWP به صورت زیر

با استفاده از  $M_Y(t)$  می‌توان گشتاور مرتبه  $k$  ام حول صفر میانگین و واریانس توزیع  $EWP$  به ترتیب به صورت زیر از توزیع  $EWP$  را به دست آورد. داریم می‌باشند

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \frac{\alpha\theta\Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)}{\beta(e^\theta - 1)} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \binom{n\alpha-1}{j} (j+1)^{-((\frac{1}{\gamma})+1)}, \\
 E[Y^k] &= \sum_{n=1}^{\infty} p(N=n) E[X_{(n)}^k] \\
 &= \frac{\alpha\theta}{\beta^K(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \alpha\beta^{-k} \\
 &\times \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha-1}{j} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma})+1)} \Gamma(\frac{k}{\gamma}+1) \\
 &= \frac{\alpha\theta\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\beta^K(e^\theta - 1)} \\
 &\times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n\alpha-1}{j} \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma})+1)} \\
 &- E^{\gamma}(Y), \\
 & \quad \quad \quad (11) \\
 & \quad \quad \quad (12)
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

توجه کنید که برای مقادیر صحیح مثبت از  $\alpha$ ، اندیس  $j$  در

با استفاده از تغییر متغیر  $i = n - 1$ ، فرمول دیگری برای معادله‌های (۸) تا (۱۲) در  $n\alpha - 1$  متوقف می‌شود.

به صورت زیر ارائه می‌شود

## ۵ گشتاورهای آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی به طور گسترده در آمار تئوری و عملی کاربرد دارند. گشتاورهای آماره‌های ترتیبی نقش مهمی را در آزمون کنترل کیفیت و قابلیت اطمینان که به طور عملی نیاز به پیش‌بینی شکست آیت‌های بعدی بر مبنای زمان‌های شکست قبلی می‌باشد، بازی می‌کند. این پیش‌بینی‌ها اغلب بر مبنای گشتاورهای آماره‌های ترتیبی صورت می‌گیرند. حال فرمول صریحی را برای تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی  $r$  امین آماره ترتیبی  $Y_{r:n}$ ، در یک نمونه تصادفی با اندازه نمونه  $n$  از توزیع  $EWP$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
 E[Y^k] &= \frac{\alpha\theta\Gamma(\frac{k}{\gamma} + 1)}{\beta^K(e^\theta - 1)} \\
 &\times \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha(i+1)-1}{j} \frac{\theta^i}{i!} (j+1)^{-((\frac{k}{\gamma})+1)} \\
 & \quad \quad \quad (10)
 \end{aligned}$$

فرض کنید متغیر تصادفی  $Y_{r:n}$ ،  $r$  امین آماره ترتیبی  $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$  در یک اندازه نمونه  $n$  تایی از

توزیعی با تابع چگالی احتمال  $f(\cdot)$  و تابع توزیع تجمعی  $F(\cdot)$  به ترتیب باشند. تابع چگالی احتمال  $Y_{r:n}$  برای

$$E[Y_{r:n}^k] = \frac{\alpha\theta}{B(r, n-r+1)} \Gamma\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right) \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^i}{(e^\theta - 1)^{r+1}}$$

$$\times \sum_{j=0}^{r-i-j-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{j} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta^l (j+1)^l}{l!}$$

$$\times \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \binom{\alpha(l+1)-1}{t} (t+1)^{\left(\frac{k}{\gamma} + 1\right)\alpha}$$

$$f_{r:n}(y) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} f(y) [F(y)]^{r-1} [1 - F(y)]^{n-r}$$

$$y > 0 \quad (13)$$

با جایگزینی معادله‌های (۳) و (۴) در معادله (۱۳) و با استفاده از بسط دوجمله‌ای داریم

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی،  $Y_{1:n}$  و  $Y_{n:n}$  با استفاده از معادله‌های (۱۴) و (۱۵) برای حالت‌های خاص  $r = 1, 2$  به دست می‌آید.

$$f_{r:n}(y) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^n}$$

$$\times y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1}$$

$$\times \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{n-r} (-1)^{r-i-j-1} \binom{r-1}{i} \binom{n-r}{j}$$

$$\times e^{(n-r-j)\theta} e^{(i+j)\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \quad (14)$$

برای کوچکترین آماره ترتیبی  $Y_{1:n}$  داریم

$$f_{1:n}(y) = \frac{n\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^n} y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1}$$

$$\times e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} (e^\theta - e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha})^{n-1}$$

$$F_{1:n}(y) = 1 - \frac{1}{(e^\theta - 1)^n} (e^\theta - e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha})^n$$

و برای بزرگترین آماره ترتیبی  $Y_{n:n}$  داریم

$$f_{n:n}(y) = \frac{n\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^n} y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1}$$

$$\times e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} (e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} - 1)^{n-1}$$

$$F_{n:n}(y) = 1 - \frac{1}{(e^\theta - 1)^n} (e^{\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} - 1)^n$$

$$F_{r:n}(y) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} [F(y)]^k [1 - F(y)]^{n-k}$$

$$= \frac{1}{(e^\theta - 1)^n} \sum_{k=r}^n \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{k-i-j}$$

$$\times \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} e^{(n-k-j)\theta} e^{(i+j)\theta(1-e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} \quad (15)$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای، بعد از مقداری محاسبات،  $k$  امین گشتاور از  $r$  امین آماره ترتیبی  $Y_{r:n}$  به صورت زیر

امیدریاضی کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی  $Y_{1:n}$  و  $Y_{n:n}$ ، با قرار دادن  $n, r = 1$  و  $k = 1$  در معادله (۱۶) به دست می‌آید

## ۶ تابع میانگین مانده عمر توزیع EWP

که  $S(t) = 1 - F(t)$  تابع بقا می‌باشد. دو عبارت زیر را به کار می‌گیریم

$$\int_t^\infty x^{\gamma+S-1} e^{-(K+1)(\beta x)^\gamma} dx$$

$$= \frac{1}{\gamma\beta^{\gamma+S}} (K+1)^{-(1+\frac{\gamma}{\beta})} \times \Gamma_{(1+\frac{\gamma}{\beta})}((K+1)(\beta t)^\gamma)$$

$$\int_0^t x^{\gamma+S-1} e^{-(K+1)(\beta x)^\gamma} dx$$

$$= \frac{1}{\gamma\beta^{\gamma+S}} (K+1)^{-(1+\frac{\gamma}{\beta})} \times \Gamma_{(1+\frac{\gamma}{\beta})}((K+1)(\beta t)^\gamma)$$

که  $\Gamma^s(t) = \int_t^\infty x^{S-1} e^{-x} dx$  مقدار بالایی تابع گامای ناکامل و  $\Gamma_s(t) = \int_0^t x^{S-1} e^{-x} dx$  مقدار پائینی تابع گامای ناکامل می‌باشد.  $r$  امین گشتاور ترتیبی از طول عمر باقیمانده از توزیع EWP به صورت زیر می‌باشد

$$m_r(t) = \frac{\alpha\theta}{S(t)(e^\theta - 1)} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \beta^{-1} t^{r-i}$$

$$\times \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\theta^j}{j!(k+1)^{1+\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$\times \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \Gamma_{(1+\frac{\alpha}{\beta})}((K+1)(\beta t)^\gamma) \quad (17)$$

که  $S(t)$  در رابطه (۵) ارائه شده است (تابع بقا از  $Y$ ). برای توزیع EWP تابع طول عمر باقیمانده متوسط که با قرار دادن  $r = 1$  در رابطه (۱۷) به دست می‌آید، در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۱ تابع میانگین مانده عمر توزیع EWP با تابع توزیع تجمعی رابطه (۳) به صورت زیر می‌باشد

$$m_1(t) = \frac{1}{S(t)} \frac{\alpha\theta}{(e^\theta - 1)} \sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\theta^j}{j!(k+1)^{1+\frac{\alpha}{\beta}}}$$

$$\times \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \Gamma_{(1+\frac{\alpha}{\beta})}((K+1)(\beta t)^\gamma) - t$$

با فرض اینکه یک عنصر تا زمان  $t \geq 0$  زنده باشد، طول عمر مانده آن، از زمان  $t$  تا زمان شکست  $X$  به صورت متغیر تصادفی شرطی  $X - t | X > t$  تعریف می‌شود. تابع میانگین مانده عمر، مهمترین تابع در تحلیل‌های بقا، علوم آماری، اقتصاد، علوم اجتماعی و قابلیت اطمینان می‌باشد.

در قابلیت اطمینان، مشخص است که تابع MRL (میانگین مانده عمر) و نسبت دو گشتاور متوالی از طول عمر باقیمانده، با استفاده از یک توزیع منحصر به فرد مشخص می‌شوند. (گوپتا و گوپتا [۱۸] را ببینید). تابع MRL به اندازه تابع نرخ خطر با اهمیت است، از این رو هر یک از آن‌ها می‌توانند برای تعیین توزیع طول عمر معادل منحصر به فرد به کار گرفته شوند. متغیر تصادفی طول عمر دارای میانگین مانده عمر صعودی را با نماد IMRL و نزولی را با نماد DMRL نمایش می‌دهند. تابع MRL که ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است، معمولاً نمودار وانی شکل نامیده می‌شود. رابطه بین رفتارهای دو تابع توزیع توسط بسیاری از نویسندگان مورد مطالعه قرار گرفته است مثل گیتانی [۱۴]، مای [۳۰]، پارک [۳۷] و تانگ و همکارانش [۳۹].  $r$  امین گشتاور ترتیبی از طول عمر باقیمانده توزیع EWP به صورت فرمول کلی زیر می‌باشد

$$m_r(t) = E[(Y - t)^r | Y > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^\infty (y - t)^r f(y) dy$$



دومین گشتاور از تابع طول عمر باقیمانده از توزیع EWP  $r$  امین گشتاور ترتیبی از گذشته عمر از توزیع EWP از به صورت زیر است

$$\mu_r(t) = E[(t - Y)^r | Y \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t (t - y)^r f(y) dy$$

از این رو

$$\mu_r(t) = \frac{1}{F(t)} \frac{\alpha\theta}{(e^\theta - 1)} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \beta^{-i} t^{r-i} \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^j}{j!(k+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \times \Gamma_{(1+\frac{1}{\gamma})}((K+1)(\beta t)^\gamma) \quad (18)$$

با قراردادن  $r = 1, 2$  در رابطه (۱۸)، میانگین و دومین گشتاور از گذشته عمر از توزیع EWP به دست می آید. همچنین با استفاده از  $\mu_1(t)$  و  $\mu_2(t)$ ، واریانس تابع گذشته عمر از توزیع EWP ارائه می شود.

## ۷ گشتاورهای وزنی احتمال

گشتاورهای وزنی احتمال  $(PWS)$ <sup>۱۹</sup>، امیدریاضی تابعهای مشخصی از متغیرهای تصادفی تعریف شده زمانی که گشتاورهای ترتیبی از متغیرهای تصادفی موجود هستند، می باشد. روش  $PWS$  به طور کلی برای برآورد پارامترهای یک توزیع زمانی که معکوس آنها به طور واضح مشخص نیست مورد استفاده قرار می گیرد. برآوردها بر مبنای  $PWS$  اغلب استانداردترین برآوردها بر مبنای گشتاوری هستند، آنها زمانی به کار گرفته می شوند که برآوردهای درستنمایی موجود نیستند یا به سختی محاسبه می شوند. آنها همچنین در

$$m_r(t) = \frac{1}{S(t)} \left\{ \frac{\alpha\theta}{\beta^\gamma (e^\theta - 1)} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^j}{j!(k+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \times \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \Gamma_{(1+\frac{1}{\gamma})}((K+1)(\beta t)^\gamma) - \beta t \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^j}{j!(k+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \times \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \Gamma_{(1+\frac{1}{\gamma})}((K+1)(\beta t)^\gamma) \right] \right\} + t^r$$

واریانس تابع طول عمر باقیمانده از توزیع EWP با استفاده از  $m_1(t)$  و  $m_2(t)$  به دست می آید.

حال به طور مشابه در مورد تابع گذشته عمر و برخی از ویژگیهای آن بحث می کنیم. گذشته عمر به صورت متغیر تصادفی شرطی  $t - x | x \leq t$  تعریف می شود که نشان دهنده زمان سپری شده از شکست یک مولفه که عمر آن کمتر یا مساوی با  $t$  است می باشد. این متغیر تصادفی همچنین ممکن است زمان غیر فعال نامیده شود (یا زمان شکست)؛ برای جزئیات بیشتر کاندو و ناندا [۲۲] و ناندا و همکاران [۳۵] را ببینید. همچنین در قابلیت اطمینان گذشته عمر متوسط (MRRL) و نسبت دوگشتاور متوالی از گذشته عمر با توزیع منحصر به فردی مشخص می شود. با استفاده از (۴) و (۵) تابع نرخ خطر معکوس از توزیع EWP به صورت زیر می باشد

$$r(y) = \frac{f(y)}{F(y)} = \frac{\alpha\gamma^\theta \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{\alpha-1}}{e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha} - 1} \times e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha}$$

<sup>۱۹</sup>Probability weighted moments

مقادیر آغازین برای برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم به‌کار گرفته می‌شوند. روش  $PWMS$  که توسط بسیاری از محققین مورد بررسی قرار گرفته، اولین بار توسط گرین وود و همکارانش [۱۷] مطرح شد و به‌طور وسیع در مطالعات علمی و هدف‌های تحقیقاتی مورد استفاده قرار گرفته است. هاسکینگ و همکارانش [۲۰] ویژگی‌های پارامترهای برآورد شده با استفاده از روش  $PWMS$  را برای توزیع مقادیر اکسترم تعمیم یافته با استفاده از سری‌های نسبتاً طولانی و خلاصه‌ای مناسب از روش  $PWMS$  را ارائه کردند. هاسکینگ [۲۱] نشان داد که روش  $PWMS$ ، بهتر از روش ماکسیمم درست‌نمایی (ML) در برآورد پارامترها زمانی که توزیع مقادیر اکسترم برای دوره‌های بازگشتی طولانی‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌باشد. در این مقاله گشتاورهای وزنی احتمال از توزیع EWP را محاسبه می‌کنیم که در برآورد پارامترهای EWP مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال  $f(\cdot)$  و تابع توزیع تجمعی  $PWMS$  با استفاده از فرمول

$$\begin{aligned} \tau_{S,r}(t) &= \frac{\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^{r+1}} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \\ &\times \int_0^\infty x^{\gamma+S-1} e^{-(\beta x)^\gamma} (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^{\alpha-1} \\ &\times e^{\theta(i+1)(1-e^{-(\beta x)^\gamma})^\alpha} dx \\ &= \frac{\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^{r+1}} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \\ &\times \sum_{j=0}^\infty \frac{(i+1)^j \theta^j}{j!} \int_0^\infty x^{\gamma+S-1} e^{-(\beta x)^\gamma} \\ &\times (1 - e^{-(\beta x)^\gamma})^{\alpha(j+1)-1} dx \\ &= \frac{\alpha\gamma^\theta\beta^\gamma}{(e^\theta - 1)^{r+1}} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \\ &\times \sum_{j=0}^\infty \frac{(i+1)^j \theta^j}{j!} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \\ &\times \int_0^\infty x^{\gamma+S-1} e^{-(k+1)(\beta x)^\gamma} dx \end{aligned}$$

به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_0^\infty x^{\gamma+S-1} e^{-(k+1)(\beta x)^\gamma} dx = \frac{\Gamma(\frac{s}{\gamma} + 1)}{\gamma\beta^{\gamma+s}(k+1)^{\frac{s}{\gamma}+1}}$$

$$\tau_{S,r}(t) = E[X^S F(X)^r] = \int_0^\infty x^S F(x)^r f(x) dx$$

داریم

$$\begin{aligned} \tau_{S,r}(t) &= \frac{\alpha\theta}{\beta^s(e^\theta - 1)^{r+1}} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} \\ &\times \sum_{j=0}^\infty \frac{(i+1)^j \theta^j}{j!} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \\ &\times \frac{\Gamma(\frac{s}{\gamma} + 1)}{(k+1)^{\frac{s}{\gamma}+1}} \end{aligned} \quad (19)$$

تذکر ۱ گشتاور مرتبه s ام از توزیع EWP با قرار دادن می شوند  
 $r = 0$  در رابطه (۱۹)، به دست می آید

$$\delta_1(X) = \int_0^\infty |x - \mu|f(x)dx = \Psi_{\mu}F(\mu) - \Psi I(\mu),$$

$$\delta_2(X) = \int_0^\infty |x - M|f(x)dx = \Psi MF(M) - M + \mu - \Psi I(\mu)$$

$$E[X^s] = \frac{\alpha\theta}{\beta^s(e^\theta - 1)^{r+1}} \sum_{j=0}^\infty \frac{(j+1)^j \theta^j}{j!} \times \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\alpha(j+1)-1}{k} \frac{\Gamma(\frac{s}{\gamma} + 1)}{(k+1)^{\frac{s}{\gamma}+1}}$$

که  
 که برابر معادله (۱۰) است اگر s ها با k جایگزین شوند.  
 همچنین میانگین و واریانس توزیع EWP با قراردادن  
 $r = 1, 2$  در رابطه بالا به دست می آید.

قضیه ۲ تابع متوسط انحرافات از توزیع EWP به صورت  
 زیر می باشد

$$I(b) = \int_0^b xf(x)dx$$

## ۸ متوسط انحرافات

میزان پراکندگی در یک جامعه با استفاده از کمیت انحراف از میانگین و میانه می تواند محاسبه شود. متوسط انحراف از میانگین، یک آماره قوی و نیرومند است که انعطاف پذیری آن برای داده های پرت در یک مجموعه از داده نسبت به انحراف استاندارد بیشتر است. انحراف استاندارد، فاصله از میانگین، مربع می شود بنابراین به طور متوسط انحرافات بزرگ، سنگین تر هستند و بنابراین داده های پرت به سختی تحت تاثیر آن قرار می گیرند. متوسط انحراف از میانگین، میزان فاصله از کوچکترین مقدار از داده های پرت است. متوسط انحراف از میانه یک معیار سنجش پراکندگی آماری است که یک برآوردکننده قوی تر از واریانس نمونه یا انحراف استاندارد می باشد. بنابراین آن با توزیع هایی بدون میانگین و یا واریانس بهتر رفتار می کند. برای یک متغیر تصادفی X در این بخش، برآورد پارامترهای توزیع EWP را ارائه می کنیم. فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی میانگین  $\mu$  و میانه M، متوسط انحراف از میانگین و با مقادیر مشاهده شده  $y_1, y_2, \dots, y_n$  توزیع EWP با متوسط انحراف از میانه به ترتیب به صورت زیر تعریف پارامترهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\theta$  باشند. فرض کنید  $\Theta =$

## ۹ برآورد و استنباط

در این بخش، برآورد پارامترهای توزیع EWP را ارائه می کنیم. فرض کنید  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی میانگین  $\mu$  و میانه M، متوسط انحراف از میانگین و با مقادیر مشاهده شده  $y_1, y_2, \dots, y_n$  توزیع EWP با متوسط انحراف از میانه به ترتیب به صورت زیر تعریف پارامترهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\theta$  باشند. فرض کنید  $\Theta =$

برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامتر  $\Theta$ ؛ یعنی  $\hat{\Theta}$  با استفاده از حل تابع غیرخطی  $u_n(\Theta) = 0$ ، به دست می‌آید. راه حل این تابع غیرخطی دارای فرم بسته‌ای نیست. برای ارائه برآورد بازه‌ای و آزمون فرض روی پارامترها، نیاز به ماتریس اطلاع داریم. ماتریس اطلاع مشاهده شده  $4 \times 4$  به صورت زیر است.

$$I_n(\Theta) = - \begin{bmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\gamma} & I_{\alpha\theta} \\ I_{\alpha\beta} & I_{\beta\beta} & I_{\beta\gamma} & I_{\beta\theta} \\ I_{\alpha\gamma} & I_{\beta\gamma} & I_{\gamma\gamma} & I_{\gamma\theta} \\ I_{\alpha\theta} & I_{\beta\theta} & I_{\gamma\theta} & I_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

که مولفه‌های آن در پیوست A ارائه شده‌اند. با استفاده از یک تقریب بزرگ نمونه‌ای رایج، برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم  $\Theta$ ؛ یعنی  $\hat{\Theta}$  تقریباً به صورت  $J_n(\Theta) = E[I_n(\Theta)]$  که  $N_\varphi(\Theta, J_n(\Theta)^{-1})$  می‌باشد. تحت شرایطی که برای پارامترها در خارج از فضای پارامتری انجام می‌شود نه روی مرزها، توزیع مجانبی  $\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta)$  به صورت  $N_\varphi(0, J_n(\Theta)^{-1})$  می‌باشد که  $J_n(\Theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} I_n(\Theta)$  واحد می‌باشد. این رفتار تقارنی زمانی معتبر است که  $J(\Theta)$  با ماتریس اطلاع میانگین نمونه که در  $\hat{\Theta}$  محاسبه شد؛ یعنی  $n^{-1} I_n(\hat{\Theta})$  جایگزین شود. برآورد توزیع چندمتغیره متقارن  $N_\varphi(\theta, I_n(\Theta)^{-1})$  از  $\hat{\Theta}$  برای ایجاد بازه‌های اطمینان تقریبی برای پارامترها و برای تابع نرخ خطر مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک بازه اطمینان  $100(1-\gamma)\%$  درصدی برای هر پارامتر  $\theta_r$  به صورت زیر می‌باشد

$$ACI_r = (\hat{\Theta}_r - Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\hat{I}^{rr}}, \hat{\Theta}_r + Z_{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\hat{I}^{rr}})$$

که  $\hat{I}^{rr}$ ، زوج  $(r, r)$ ، عناصر روی قطر  $I_n(\hat{\Theta})^{-1}$  برای

$(\alpha, \beta, \gamma, \theta)^T$  بردار پارامتر باشد. تابع کلی لگاریتم درست‌نمایی ماکسیمم از رابطه زیر به دست می‌آید

$$l_n = l_n(y; \Theta) = -n \log[e^\theta - 1] + n[\log\theta + \log\alpha + \log\gamma + \beta] + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) + \theta \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha$$

تابع محاسبه‌ای مربوطه، به صورت  $u_n(\Theta) = \left( \frac{\partial l_n}{\partial \alpha}, \frac{\partial l_n}{\partial \beta}, \frac{\partial l_n}{\partial \gamma}, \frac{\partial l_n}{\partial \theta} \right)^T$  ارائه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_n}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) + \theta \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha, \\ \frac{\partial l_n}{\partial \beta} &= \frac{n\gamma}{\beta} - \gamma \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma + (\alpha - 1) \gamma \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} + \theta \gamma \alpha \beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1}, \\ \frac{\partial l_n}{\partial \gamma} &= \frac{n}{\gamma} + n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} + \theta \alpha \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1}, \\ \frac{\partial l_n}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha - \frac{n}{1 - e^{-\theta}} \end{aligned}$$

$r = 1, 2, 3, 4$  و  $Z_{\frac{\gamma}{r}}$  چندک  $1 - \frac{\gamma}{r}$  از توزیع نرمال زیر است استاندارد است.

$$g(v, z; \Theta) = f(y|z)f(z) = \frac{\theta^z}{z!(e^\theta - 1)} z\alpha\gamma^\theta \beta^\gamma y^{\gamma-1} \times e^{-(\beta y)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^{z\alpha-1}$$

که  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma, \theta)$  و  $y > 0$  و  $z \in n$ . طبق فرمول، در مرحله E ام از الگوریتم تسلسلی EM، نیاز به امیدریاضی  $\Theta^{(r)} = (\alpha^{(r)}, \beta^{(r)}, \gamma^{(r)}, \theta^{(r)})$  می‌باشد که  $(z|y; \Theta^{(r)})$  است، برآورد بازگشتی از  $\Theta$  (در  $\Gamma$  امین تسلسل) می‌باشد. تابع چگالی احتمال  $z$  به شرط  $y$ ؛ یعنی  $g(z|y)$  و امیدریاضی آن به صورت زیر می‌باشد

$$g(z|y) = \frac{e^{-\theta} (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha [\theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha]^{z-1}}{(z-1)!},$$

$$E(z|Y=y) = 1 + \theta (1 - e^{-(\beta y)^\gamma})^\alpha.$$

الگوریتم تسلسلی EM، در مرحله M ام با استفاده از برآورد ماکسیمم درستنمایی روی  $\Theta$  با جای‌گزینی  $z$  های از دست رفته، با مقادیر مورد انتظار شرطی که در بالا ارائه شد، کامل می‌شود. لگاریتم درستنمایی ماکسیمم برای داده کامل به صورت زیر است

$$l_n^*(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; \Theta) \propto \sum_{i=1}^n z_i \log \theta - n \log(e^\theta - 1) + n \log \alpha + n \log \gamma + n \gamma \log \beta + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma + \sum_{i=1}^n (z_i \alpha - 1) \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}),$$

## ۱.۹ الگوریتم EM

برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\theta$  در بخش قبل با مقادیر عددی به دست می‌آیند. الگوریتم نیوتن رافسون یکی از روش‌های استاندارد برای تعیین MLE های پارامترها می‌باشد.

برای به‌کارگیری الگوریتم، مشتق‌های دوم از لگاریتم درستنمایی ماکسیمم، در تمامی تکرارها مورد نیاز است. الگوریتم EM (الگوریتم EM یک روش تکرارشونده است که به دنبال یافتن برآوردی با بیشترین درستنمایی برای پارامترهای یک توزیع پارامتری است) ابزاری بسیار مفید در مرتب‌سازی مسائل مربوط به داده‌های ناکامل می‌باشد، دمپستر و همکاران [۱۳] و لاچلان و کریشنان را ببینید [۲۹]. در روش‌های تسلسلی به‌طور تکراری، داده‌های از دست رفته با مقادیر برآورد شده و پارامترهای جدید جای‌گزین می‌شوند. این روش اگر مجموعه داده‌های کامل به آسانی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند به‌طور خاص مفید است. فرض کنید داده‌های کامل  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  با مقادیر مشاهده شده  $y_1, y_2, \dots, y_n$  و متغیرهای تصادفی مفروض  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  را داشته باشیم. تابع چگالی احتمال توام که حاصلضرب توابع چگالی حاشیه‌ای  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  است همان درستنمایی مورد نظر است. بنابراین فرض توزیع داده‌های کامل را برای هر  $(Y_i, Z_i)$  که  $i = 1, \dots, n$  دارای تابع چگالی توام

مولفه‌های تابع محاسبه‌ای به صورت زیر که  $\hat{\alpha}^{(t+1)}$ ،  $\hat{\beta}^{(t+1)}$  و  $\hat{\theta}^{(t+1)}$  به طور عددی محاسبه می‌شوند. لذا برای  $i = 1, \dots, n$  داریم

$$z_i^{(t)} = 1 + \hat{\theta}^{(t)} (1 - e^{-(\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t)}}})^{\hat{\alpha}^{(t)}}.$$

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n z_i \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})$$

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial \beta} = \frac{n\gamma}{\beta} - \gamma\beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n y_i^\gamma + \gamma\beta^{\gamma-1} \sum_{i=1}^n (z_i\alpha - 1) \left[ \frac{y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \right],$$

### ۱۰ زیرمدل‌هایی از توزیع EWP

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + n \log \beta + \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n (\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) + (z_i\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(\beta y_i)^\gamma \log(\beta y_i) e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}},$$

توزیع EWP شامل تعدادی زیرمدل برای مقادیر مشخص  $\alpha, \beta, \gamma$  از است. تعدادی از این توزیع‌ها با جزئیات در این بخش ارائه می‌شوند.

$$\frac{\partial l_n^*}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} + \sum_{i=1}^n z_i - \frac{n}{1 - e^{-\theta}}$$

با استفاده از یک تابع غیرخطی از  $u_n^*(\Theta) = 0$ ، مراحل تسلسلی از الگوریتم EM به صورت زیر ارائه می‌شوند

$$\hat{\alpha}^{t+1} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n z_i^{(t)} \log(1 - e^{-(\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t)}}})},$$

### ۱.۱۰ توزیع وایبول - پواسون کامل CWP

$$\frac{n\hat{\gamma}^{(t)}}{\hat{\beta}^{(t+1)}} - \hat{\gamma}^{(t)} (\hat{\beta}^{(t+1)})^{\hat{\gamma}^{(t)}-1} \sum_{i=1}^n y_i^{\hat{\gamma}^{(t)}} + \hat{\gamma}^{(t)} (\hat{\beta}^{(t+1)})^{\hat{\gamma}^{(t)}-1} \times \sum_{i=1}^n (z_i^{(t)} \hat{\alpha}^{(t)} - 1) \frac{y_i^{\hat{\gamma}^{(t)}} e^{(\hat{\beta}^{(t+1)})^{\hat{\gamma}^{(t)}}}}{1 - e^{(\hat{\beta}^{(t+1)})^{\hat{\gamma}^{(t)}}}} = 0$$

توزیع CWP یک حالت خاص از توزیع EWP برای  $\alpha = 1$  می‌باشد. این روش کامل‌کننده روش موریس و بارتو- سوزا [۲۹]، در معرفی توزیع وایبول - پواسون (WP) می‌باشد.

$$\frac{n}{\hat{\gamma}^{(t+1)}} + n \log \hat{\beta}^{(t)} + \sum_{i=1}^n \log y_i - \sum_{i=1}^n \log(\hat{\beta}^{(t)} y_i) \times (\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t+1)}} + \sum_{i=1}^n (z_i^{(t)} \hat{\alpha}^{(t)} - 1) \frac{(\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t+1)}} \log(\hat{\beta}^{(t)} y_i) e^{-(\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t+1)}}}}{1 - e^{-(\hat{\beta}^{(t)} y_i)^{\hat{\gamma}^{(t+1)}}}} = 0$$

$$f(y) = \frac{\gamma^\theta \beta^\gamma}{e^\theta - 1} y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})}$$

$$F(y) = \frac{e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})} - 1}{e^\theta - 1}$$

$$h(y) = \frac{\gamma^\theta \beta^\gamma y^{\gamma-1} e^{-(\beta y)^\gamma} e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})}}{e^\theta - e^{\theta(1 - e^{-(\beta y)^\gamma})}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n z_i^{(t)}}{\hat{\theta}^{(t+1)}} - \frac{n}{1 - e^{-\theta^{(t+1)}}} = 0$$

طبق رابطه (۱۱) و (۱۲) میانگین و واریانس توزیع میانگین و واریانس توزیع GEP به صورت زیر می باشد CWP به ترتیب به صورت زیر می باشد.

$$E[Y] = \frac{\alpha\theta}{\beta(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\binom{n\alpha-1}{j}}{(j+1)^2} - \frac{\theta}{\beta(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{n!} \psi(n\alpha-1) - \frac{1}{\beta} \psi(1), \quad (21)$$

$$E[Y] = \frac{\theta\Gamma((\frac{1}{\gamma}) + 1)}{\beta(e^\theta - 1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \theta^{n-1} \frac{(j+1)^{-((\frac{1}{\gamma})+1)}}{(n-1-j)!j!} \quad (20)$$

$$Var[Y] = \frac{\gamma\alpha\theta}{\beta^\gamma(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\binom{n\alpha-1}{j}}{(j+1)^2} - E^\gamma(Y),$$

$$Var[Y] = \frac{\theta\Gamma((\frac{\gamma}{\gamma}) + 1)}{\beta^\gamma(e^\theta - 1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \theta^{n-1} \frac{(j+1)^{-((\frac{\gamma}{\gamma})+1)}}{(n-1-j)!j!} - E^\gamma(Y),$$

$$= \frac{1}{\beta^\gamma} \psi'(1) - \frac{\theta}{\beta^\gamma(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{n!} \times (\psi'(n\alpha+1) + (\psi(n\alpha+1) - \psi(1))^\gamma) - E^\gamma(Y),$$

که  $E[Y]$  در معادله (۲۰) ارائه شده است. توزیع وایبول از توزیع CWP با این فرض که  $\theta$  به سمت صفر میل کند، دوگاما و  $\psi'(\cdot)$  مشتق آن است. که  $E[Y]$  در معادله (۲۱) ارائه شده است و  $\psi(\cdot)$  تابع

### ۳.۱۰ توزیع پواسون نمایی کامل CEP

توزیع CEP حالت خاص دیگری از توزیع EWP که با جایگزینی  $\alpha = \gamma = 1$  در توزیع EWP به دست می آید. کانکو و همکارانش [۹]، این توزیع را با نام توزیع پواسون-نمایی شده معرفی کردند. این توزیع دارای نرخ خطر افزایشی می باشد. تابع چگالی احتمال، تابع تجمع و تابع نرخ خطر توزیع CEP به ترتیب به صورت زیر می باشد.

$$f(y) = \frac{\beta\theta}{e^\theta - 1} (1 - e^{-\beta y})^{\alpha-1} e^{-(\beta y)},$$

$$F(y) = \frac{e^{\theta(1-e^{-\beta y})} - 1}{e^\theta - 1},$$

$$h(y) = \frac{\beta\theta e^{-\beta y} e^{\theta(1-e^{-\beta y})}}{e^\theta - e^{\theta(1-e^{-\beta y})}}$$

### ۲.۱۰ توزیع پواسون نمایی تعمیم یافته GEP

توزیع GEP حالتی خاص از توزیع EWP برای  $\gamma = 1$  می باشد. این توزیع توسط محمودی و جعفری [۲۵]، به طور جزئی معرفی و تجزیه و تحلیل شد. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمع و تابع نرخ خطر توزیع GEP به ترتیب به صورت زیر می باشد.

$$f(y) = \frac{\alpha\beta\theta}{e^\theta - 1} (1 - e^{-(\beta y)})^{\alpha-1} e^{-(\beta y)} e^{\theta(1-e^{-\beta y})^\alpha}$$

$$F(y) = \frac{e^{\theta(1-e^{-\beta y})^\alpha} - 1}{e^\theta - 1}$$

$$h(y) = \frac{\alpha\beta\theta(1 - e^{-(\beta y)})^{\alpha-1} e^{-(\beta y)} e^{\theta(1-e^{-\beta y})^\alpha}}{e^\theta - e^{\theta(1-e^{-\beta y})^\alpha}}$$

شده‌اند. نمودار TTT و منحنی کاپلان-مهیر برای داده‌های اولیه در شکل ۳، نشان‌دهنده اینست که تابع نرخ خطر افزایشی است و بنابراین نشان‌دهنده مناسب بودن توزیع EWP برای این مجموعه از داده‌ها می‌باشند. در جدول ۱، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، مقادیر آماره آزمون k-s (کلموگروف اسمیرنوف)، و p-value مربوط به آن (p-مقدار)، و  $-\log(L)$ ، AIC (معیار اطلاع آکائیک)، AD (آماره آزمون دارلینگ-اندرسون) و CM (آماره آزمون کرامر-وان میسز) برای داده‌های اولیه ارائه شده‌اند. در این مقاله آماره‌های آزمون AD و CM را به منظور بررسی این‌که کدام توزیع برای این داده‌ها بهتر است، به کار می‌بریم. آماره آزمون AD و CM با جزئیات در چن و بالاکریشن [۱۱] ارائه شده‌اند. به طور کلی کمترین مقدار از AD و CM برای این داده‌ها مناسب‌تر است. طبق این آماره‌های آزمون توزیع EWP برای مجموعه داده‌های اولیه بهتر از سایر توزیع‌ها می‌باشد. با استفاده از آزمون نسبت درست‌نمایی (LR)، فرض صفر  $H_0 = EW$  در مقابل فرض  $H_1 = EWP$ ، یا به طور معادل  $\theta = 0$  :  $H_0$  در مقابل فرض  $\theta \neq 0$  :  $H_1$ ، را آزمون می‌کنیم. مقدار آماره آزمون (LR) و p-value مربوط به آن، به ترتیب ۳.۴ و ۰.۰۶۵۱ می‌باشند. بنابراین فرض صفر (مدل EM) در مقابل فرض (مدل EWP) یا به طور معادل فرض  $H_0: (\gamma, \theta) = (1, 0)$  در مقابل فرض  $H_1: (\gamma, \theta) \neq (1, 0)$  رد می‌شود. مقدار آماره آزمون (LR) برابر ۸.۳۶ است (p-value =  $1 \times 10^{-8}$ ) که نشان‌دهنده اینست که فرض صفر (مدل GE) در مقابل فرض (مدل EWP) در هر سطح اطمینان رد می‌شود. همچنین فرض صفر  $Weibull$  :  $H_0$  در مقابل فرض  $EWP$  :  $H_1$ ، یا به طور معادل فرض صفر  $H_0: (\alpha, \theta) = (1, 0)$  در مقابل فرض

میانگین و واریانس توزیع CEP به صورت زیر می‌باشند

$$E[Y] = \frac{\theta}{\beta(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\binom{n-1}{j}}{(j+1)^2} - \frac{\theta}{\beta(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{n!} \psi(n-1) - \frac{1}{\beta} \psi(1) \quad (22)$$

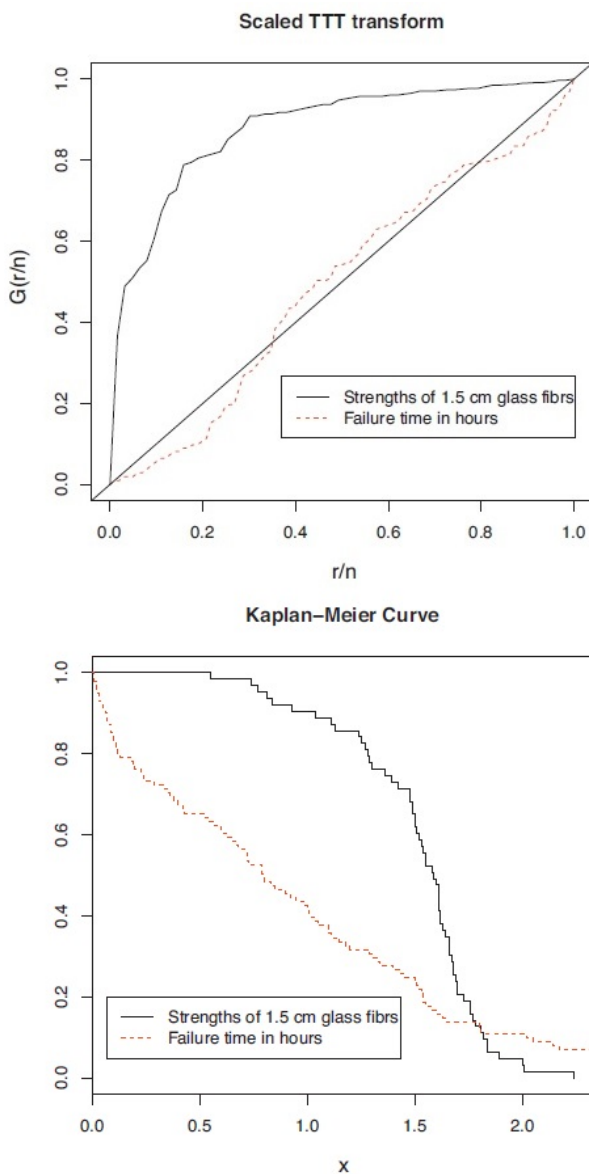
$$Var[Y] = \frac{2\theta}{\beta^2(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\binom{n-1}{j}}{(j+1)^2} - E^2(Y) = \frac{1}{\beta^2} \psi'(1) - \frac{\theta}{\beta^2(e^\theta - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{n-1}}{n!} \times (\psi'(n+1) + (\psi(n+1) - \psi(1))^2) - E^2(Y),$$

که  $E(Y)$  در معادله (۲۱) ارائه شده است.

## ۱۱ کاربردهایی از توزیع EWP

برای نشان دادن برتری توزیع EWP نسبت به سایر توزیع‌ها، نتیجه به دست آمده از این توزیع را برای تعدادی از زیرمدل‌هایش مثل EW، GE و توزیع‌های وایبول با استفاده از دو مجموعه از داده‌های واقعی مقایسه می‌کنیم. محاسبات عددی واقعی مورد نیاز با استفاده از نرم افزار SAS و R انجام می‌شود. به طور تجربی تبدیل TTT به کار گرفته می‌شود (برای جزئیات بیشتر، آراست [۱] را مطالعه کنید) و نمودار کاپلان-مهیر برای شکل تابع نرخ خطر مورد استفاده قرار می‌گیرد. داده‌های اولیه شامل ۶۳ مقدار ثبت شده از مقاومت فایبرگلاس‌های ۱.۵ سانتی‌متری که در آزمایشگاه فیزیک ملی در انگلستان اندازه‌گیری شده است می‌باشد. بارتو-سوزا و همکاران [۶] را ببینید. این داده‌ها برای نشان دادن مناسب بودن توزیع نمایی-بتای تعمیم یافته (EWP) به کار گرفته





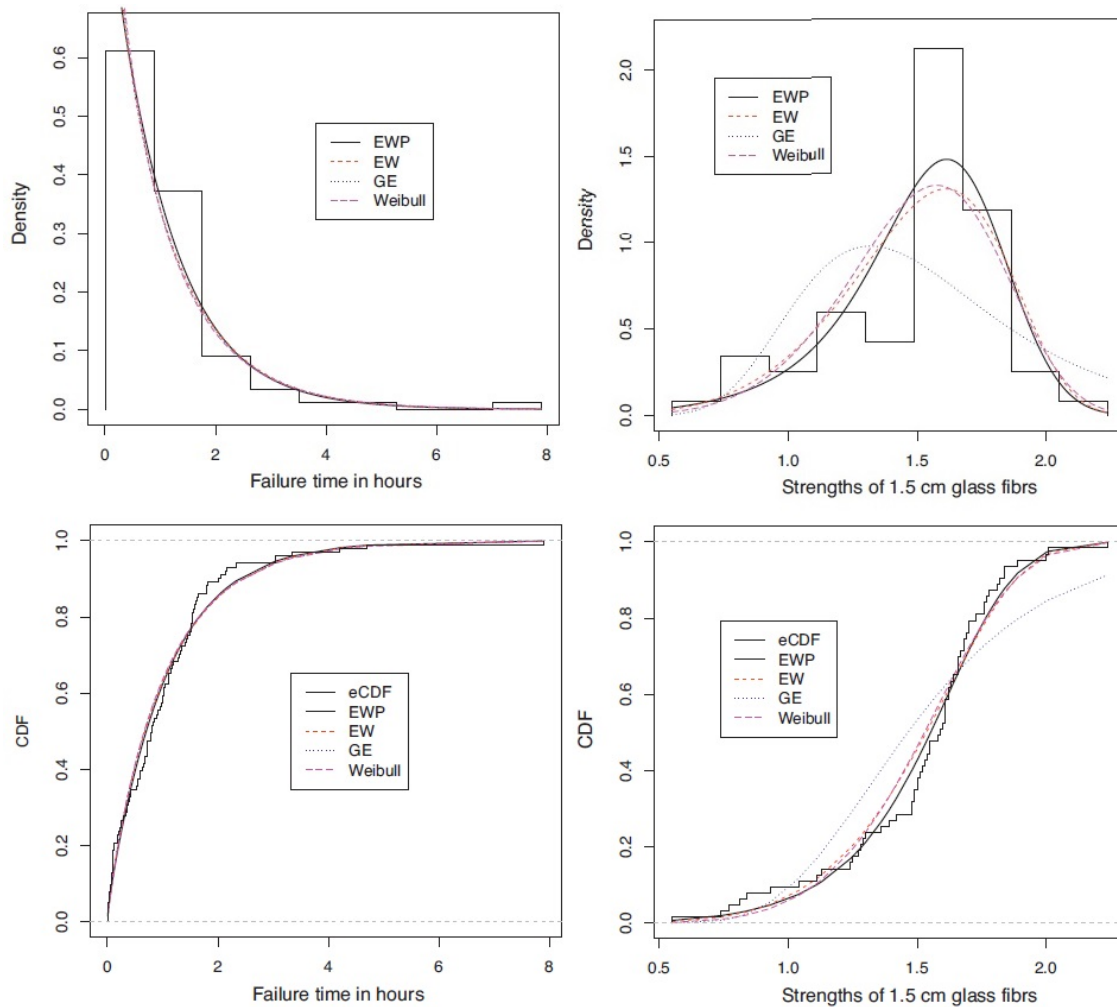
شکل ۳: نمودار TTT و منحنی کاپلان- مهیر برای مقاومت فایبرگلاس‌های ۱.۵ سانتی‌متری

## ۱۲ نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیعی چهار پارامتری جدید به نام توزیع EWP معرفی شد که این توزیع تعمیم‌یافته توزیع EW و شامل چندین زیرمدل طول عمر، مثل (GEP)،

مقدار آماره  $H_1 : (\alpha, \theta) \neq (1, 0)$  را آزمون می‌کنیم. مقدار آماره آزمون (LR) برابر ۴.۴ ( $p\text{-value} = 0.1108$ ) است که نشان‌دهنده اینست که فرض صفر (مدل وایبول) در برابر فرض  $H_1$  (مدل EWP) در سطح اطمینان بزرگتر از ۰.۱۱۰۸ رد می‌شود و برای هر سطح اطمینان کمتر از ۰.۱۱۰۸ فرض صفر رد نمی‌شود. اما مقدار AD و CM در جدول ۱ نشان‌دهنده اینست که توزیع EWP مناسب‌تر از توزیع وایبول برای این مجموعه از داده‌های اولیه می‌باشد. برای دومین کاربرد، داده‌های مربوط به استحکام زمان‌های شکست در ساعت را که در اندروز و هرزبرگ [۳] و بارلو و همکاران [۴] در تحقیقات خود نشان داده‌اند، در نظر می‌گیریم. نمودار TTT و منحنی کاپلان- مهیر برای این داده‌ها در شکل ۳، نشان‌دهنده اینست که تابع نرخ خطر به شکل وانی شکل می‌باشد و بنابراین نشان‌دهنده مناسب بودن توزیع EWP برای این داده‌ها می‌باشد. برآورد ماکسیمم درستنمایی با انحراف استاندارد از پارامترها، مقادیر روش آماری  $k$ -s (کلموگروف اسمیرنوف)،  $P$ -مقدار و  $2 \log(L)$ ، معیار (اطلاعاتی آکائیک) AD، (آماره اندرسون-دارلینگ) و CM (آماره کرامر فون میزس) در جدول ۲ ارائه شده‌اند. از این داده‌ها متوجه می‌شویم که مدل EWP بهتر از توزیع‌های GE، EW و وایبول بر اساس این داده‌ها می‌باشد. نمودارهای تخمینی از تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع بقا از مدل‌های EWP، GE، EW و وایبول برای مجموعه داده‌های متناظر با جدول ۱ و ۲ به ترتیب در شکل ۴ ارائه شده‌اند. این نمودارها بیان می‌کنند که توزیع EWP، نسبت به توزیع‌های EW، GE و توزیع وایبول برای این دو مجموعه از داده‌ها مناسب‌تر است.

(CWP)، (CEP)، (ERP) و (RP) می‌باشد. تابع نرخ خطر توزیع EWP دارای انعطاف زیادی است و به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای توزیع می‌تواند هر یک از حالت‌های صعودی، نزولی یا وانی شکل را اختیار کند. چند ویژگی از این توزیع جدید مثل تابع چگالی احتمال، تابع نرخ خطر و قابلیت اطمینان، چندک‌ها و گشتاورهای آن معرفی شد و همچنین روش پارامترهای توزیع به روش EM برآورد شدند. مناسب بودن مدل EWP برای دو مجموعه از داده‌های واقعی، انعطاف‌پذیری و متعارف بودن توزیع پیشنهادی را در مدل‌بندی داده‌ها نشان می‌دهد.



شکل ۴: نمودارهای تخمینی تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع بقا مدل‌های EWP، EW، GE و وایبول برای مجموعه داده‌های متناظر با جدول متناظر با جدول ۱ و ۲

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی با انحراف استاندارد از پارامترها، مقادیر روش آماری  $k-s$ ،  $P$ -مقدار و  $-2 \log(L)$ ،  $AD$ ،  $AIC$  و  $CM$ .

مدل ارائه شده	برآوردها	(K-S)	p-value	$-2 \log(L)$	AIC	AD	CM
وایبول- پواسون نمایی شده	$\hat{\alpha} = 0.578(0.3424)$ $\hat{\beta} = 0.647(0.0508)$ $\hat{\gamma} = 0.502(1.395)$ $\hat{\theta} = 2.782(1.568)$	0.1154	0.3731	26	34	0.682	0.195
وایبول- نمایی شده	$\hat{\alpha} = 0.671(0.2489)$ $\hat{\beta} = 0.582(0.0292)$ $\hat{\gamma} = 7.258(1.707)$	0.1901	0.0211	29.4	35.4	1.086	0.279
نمایی هندسی	$\hat{\alpha} = 31.349(9.519)$ $\hat{\beta} = 2.612(0.2380)$	0.2291	0.0027	62.8	66.8	4.340	0.881
وایبول	$\hat{\alpha} = 0.614(0.0140)$ $\hat{\beta} = 5.781(0.5761)$	0.1589	0.0830	30.4	34.4	3.135	0.297

جدول ۲: برآورد ماکسیمم درست‌نمایی با انحراف استاندارد از پارامترها، مقادیر روش آماری  $k-s$ ،  $P$ -مقدار و  $-2 \log(L)$ ،  $AD$ ،  $AIC$  و  $CM$  برای مقاومت فایبرگلاس‌های ۱.۵ سانتی‌متری.

مدل ارائه شده	برآوردها	(K-S)	p-value	$-2 \log(L)$	AIC	AD	CM
وایبول- پواسون نمایی شده	$\hat{\alpha} = 0.859(0.3681)$ $\hat{\beta} = 1.303(0.7398)$ $\hat{\gamma} = 0.8717(0.2409)$ $\hat{\theta} = 1.266(1.2007)$	0.0725	0.6640	204.6	212.6	0.841	0.218
وایبول- نمایی شده	$\hat{\alpha} = 0.793(0.287)$ $\hat{\beta} = 0.821(0.2651)$ $\hat{\gamma} = 1.060(0.2399)$	0.0844	0.4677	205.6	211.6	0.955	0.247
نمایی هندسی	$\hat{\alpha} = 0.866(0.1098)$ $\hat{\beta} = 0.888(0.1201)$	0.0887	0.4041	205.6	209.6	1.021	0.263
وایبول	$\hat{\alpha} = 1.010(0.1141)$ $\hat{\beta} = 0.926(0.0726)$	0.0907	0.3777	206	210	1.224	0.2789

### پیوست A

درایه‌های ماتریس اطلاع  $4 \times 4$  مشاهده شده  $I_n(\theta)$  در زیر ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
 & \times (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} (\beta y_i)^{\gamma-2} \\
 & - \alpha \theta \gamma^\gamma \sum_{i=1}^n y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma} \\
 & \times (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} (\beta y_i)^{\gamma(\gamma-1)} \\
 & + \alpha(\alpha-1) \theta \gamma^\gamma \sum_{i=1}^n y_i^\gamma e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} \\
 & \times (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-2} (\beta y_i)^{\gamma(\gamma-1)}, \\
 I_{\beta\theta} = & \alpha \gamma \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 I_{\beta\gamma} = & \sum_{i=1}^n y_i (\beta y_i)^{\gamma-1} - \gamma \sum_{i=1}^n y_i \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 & + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n y_i \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} (\beta y_i)^{\gamma-1}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & + (\alpha-1) \gamma \sum_{i=1}^n y_i \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & - (\alpha-1) \gamma \sum_{i=1}^n y_i \frac{e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1}}{(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\gamma} \\
 & - (\alpha-1) \gamma \sum_{i=1}^n y_i \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & + \alpha \theta \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 & + \alpha \theta \gamma \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \\
 & \times \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 & - \alpha \theta \gamma \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \\
 & \times \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 & + \alpha(\alpha-1) \theta \gamma \sum_{i=1}^n y_i e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-2} \\
 & \times \log(\beta y_i) (\beta y_i)^{\gamma-1}, \\
 I_{\alpha\alpha} = & \frac{-n}{\alpha^\gamma} + \theta \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha \\
 & + (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\gamma \\
 I_{\alpha\beta} = & \gamma \sum_{i=1}^n y_i \frac{(\beta y_i)^{\gamma-1} e^{-(\beta y_i)^\gamma}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & + \theta \gamma \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} (\beta y_i)^{\gamma-1} \\
 & + \theta \alpha \sum_{i=1}^n y_i e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \\
 & \times \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) (\beta y_i)^{\gamma-1}, \\
 I_{\alpha\theta} = & \sum_{i=1}^n (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\alpha \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}), \\
 I_{\alpha\gamma} = & \sum_{i=1}^n \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^\gamma}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & + \theta \sum_{i=1}^n e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^\gamma \\
 & + \alpha \theta \sum_{i=1}^n e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \\
 & \times \log(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}) \log(\beta y_i) (\beta y_i)^\gamma, \\
 I_{\beta\beta} = & \frac{-n}{\beta^\gamma} - \gamma(\gamma-1) \sum_{i=1}^n y_i^\gamma (\beta y_i)^{\gamma-2} \\
 & + (\alpha-1) \gamma(\gamma-1) \sum_{i=1}^n y_i^\gamma \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} (\beta y_i)^{\gamma-2}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & - (\alpha-1) \gamma^\gamma \sum_{i=1}^n y_i^\gamma \frac{e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} (\beta y_i)^{\gamma(\gamma-1)}}{(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\gamma} \\
 & - (\alpha-1) \gamma^\gamma \sum_{i=1}^n y_i^\gamma \frac{e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} (\beta y_i)^{\gamma(\gamma-1)}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} \\
 & + \alpha \theta \gamma(\gamma-1) \sum_{i=1}^n y_i^\gamma e^{-(\beta y_i)^\gamma}
 \end{aligned}$$

[3] Andrews, D.F., Herzberg, A.M. (1985). Data: A Collection of Problems from Many Fields for the Student and Research Worker, Springer Series in Statistics, New York.

$$I_{\theta\theta} = \frac{ne^{-\theta}}{(e^{-\theta} - 1)^2} - \frac{n}{\theta^2},$$

$$I_{\theta\gamma} = \alpha \sum_{i=1}^n e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \log(\beta y_i) (\beta y_i)^\gamma,$$

[4] Barlow, R.E., Toland, R.H., Freeman, T. (1984). A Bayesian analysis of stress-rupture life of kevlar 49/epoxy spherical pressure vessels, in: Proceeding of Canadian Conference in Applied Statistics, Marcel Dekker, New York.

$$I_{\gamma\gamma} = -\frac{n}{\gamma^2} - \sum_{i=1}^n \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^\gamma + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n y_i \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^\gamma}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\gamma(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^{\gamma^2}}{(1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^\gamma} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-(\beta y_i)^\gamma} \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^{\gamma^2}}{1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma}}$$

[5] Barreto-Souza, W., Cribari-Neto, F. (2009). A generalization of the exponential-Poisson distribution, Statistics and Probability Letters; 79, 2493–2500.

$$+ \alpha \theta \sum_{i=1}^n e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \times \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^\gamma - \alpha \theta \sum_{i=1}^n e^{-(\beta y_i)^\gamma} (1 - e^{-(\beta y_i)^\gamma})^{\alpha-1} \times \log(\beta y_i)^\gamma (\beta y_i)^{\gamma^2}.$$

[6] Barreto-Souza, W., Santos, A.H.S., Cordeiro, G.M. (2010). The beta generalized exponential distribution, Journal of Statistical Computation and Simulation; 80, 159–172.

[7] Barreto-Souza, W. Morais, A.L., Cordeiro, G.M. (2011). The Weibull-geometric distribution, Journal of Statistical Computation and Simulation; 81, 645–657.

## مراجع

[1] Aarset, M.V. (1987). How to identify bathtub hazard rate, IEEE Transactions Reliability; 36, 106–108.

[2] Adamidis, K., Loukas, S. (1998). A lifetime distribution with decreasing failure rate, Statistics and Probability Letters; 39, 35–42.

- of Royal Statistical Society Series B; 39, 1-38.
- [14] Ghitany, M.E. (1998). On a recent generalization of gamma distribution, *Communications in Statistics: Theory and Methods*; 27, 223-233.
- [15] Giorgi, G.M. (1998). Concentration Index, Bonferroni. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 2, Wiley, New Yor; pp. 141-146.
- [16] Giorgi, G.M., Crescenzi, M. (2001). A look at the Bonferroni inequality measure in a reliability framework, *Statistica LXL*; 4, 571-583.
- [17] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C., Wallis, J.R. (1979). Probability weighted moments: definition and relation to parameters of several distribution expressible in inverse form, *Water Resources Research*; 15, 1049-1054.
- [18] Gupta, P.L., Gupta, R.C. (1983). On the moments of residual life in reliability and some characterization results, *Communications in Statistics: Theory and Methods*; 12, 449-461.
- [19] Gupta, R.D., Kundu, D. (2001). Exponentiated exponential family: an
- [8] Basu, A., Klein, J. (1982). Some recent developmen in competing risks theory, in: J. Crowley, R.A. Johnson (Eds.), *Survival Analysis*, IMS, Hayward; pp. 216-229.
- [9] Cancho, V.G., Louzada-Neto, F., Barriga, G.D.C. (2011). The Poisson-exponential lifetime distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*; 55, 677-686.
- [10] Chahkandi, M., Ganjali, M. (2009). On some lifetime distributions with decreasing failure rate, *Computational Statistics and Data Analysis*; 53, 4433-4440.
- [11] Chen, G., Balakrishnan, N. (1995). A general purpose approximate goodness-of-fit test, *Journal of Quality Technology*; 27, 154-161.
- [12] Choudhury, A. (2005). A Simple derivation of moments of the exponentiated Weibull distribution, *Metrika*; 62, 17-22.
- [13] Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion), *Journal*

- [25] Mahmoudi, E., Jafari, A.A. (2012). Generalized exponential-power series distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*; 56, 4047–4066.
- [26] Mahmoudi, E., Sepahdar, A. (2013). Exponentiated Weibull-logarithmic distribution, submitted for publication.
- [27] Mahmoudi, E., Shiran, M. (2012). Exponentiated Weibull-geometric distribution and its applications, submitted for publication, <http://arxiv.org/abs/1206.4008v1>
- [28] Mahmoudi, E., Shiran, M. (2012). Exponentiated Weibull-power series distribution, submitted for publication, <http://arxiv.org/abs/1206.4008v1>
- [29] McLachlan, G.J., Krishnan, T. (1997). *The EM Algorithm and Extension*, Wiley, New York.
- [30] Mi, J. (1995). Bathtub failure rate and upside-down bathtub mean residual life, *IEEE Transactions on Reliability*; 44, 388–391.
- [31] Morais, A.L., Barreto-Souza, W. (2011). A compound class of alternative to gamma and Weibull distributions, *Biometrika Journal*; 43, 117–130.
- [20] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., Wood, E.F. (1985). Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability weighted moments, *Technometrics*; 27, 251–261.
- [21] Hosking, J.R.M. (1986). *The Theory of Probability Weighted Moments*, IBM Research Report, RC 12210, Yorktown Heights, NY.
- [22] Kundu, C., Nanda, A.K. (2010). Some reliability properties of the inactivity time, *Communications in Statistics: Theory and Methods*; 39, 899–911.
- [23] Kus, C. (2007). A new lifetime distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*; 51, 4497–4509.
- [24] Louzada, F., Roman, M., Cancho, V.G. (2011). The complementary exponential geometric distribution: model, properties, and comparison with its counter part, *Computational Statistics and Data Analysis*; 55, 2516–2524.



- tics: Theory and Methods; 32, 1317–1336.
- [37] Park, K.S. (1985). Effect of burn-in on mean residual life, IEEE Transactions on Reliability; 34, 522–523.
- [38] Tahmasbi, R., Rezaei, S. (2008). A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate, Computational Statistics and Data Analysis; 52, 3889–3901.
- [39] Tang, L.C., Lu, Y., Chew, E.P. (1999). Mean residual life distributions, IEEE Transactions on Reliability; 48, 68–73.
- Weibull and power series distributions, Computational Statistics and Data Analysis; 55, 1410–1425.
- [32] Mudholkar, G.S. Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data, IEEE Transactions on Reliability; 42, 299–302.
- [33] Mudholkar, G.S. Srivastava, D.K., Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data, Technometrics; 37, 436–445.
- [34] Mudholkar, G.S., Hustson, A.D. (1996). The exponentiated Weibull family: some properties and a flood data application, Communications in Statistics: Theory and Methods; 25, 3059–3083.
- [35] Nanda, A.K., Singh, H., Misra, N., Paul, P. (2003). Reliability properties of reversed residual lifetime, Communications in Statistics: Theory and Methods; 32, 2031–2042.
- [36] Nassar, M.M., Eissa, F.H. (2003). On the exponentiated Weibull distribution, Communications in Statis-