در مورد توزیع هِلمرت (توزیع توأم $\bar{X}$ و $S^۲$)

رضا فرهادیان
دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان

چکیده

در این مقاله به بررسی توزیع توأم میانگین نمونه‌ای ($\bar{X}$) و واریانس نمونه‌ای ($S^۲$) در توزیع نرمال می‌پردازیم. در واقع هدف اصلی مقاله ارائهٔ اثباتی ساده بر پایهٔ روش استقرای ریاضی برای نشان دادن استقلال بین میانگین و واریانس نمونه‌ای است، زیرا در صورت وجود استقلال و با اطلاع از تابع چگالی $\bar{X}$ و $S^۲$، به‌سادگی می‌توان به توزیع توأم دست یافت. همچنین اطلاعات مفیدی در مورد تاریخچهٔ مطالعه بر روی استقلال میانگین و واریانس نمونه‌ای در توزیع نرمال و اولین نویسنده ای که در کارهای خود به این موضوع پرداخته است، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع هِلمرت، توزیع نرمال، میانگین نمونه‌ای، واریانس نمونه‌ای، استقلال.

۱ مقدمه

فرض کنید $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$، یک نمونهٔ تصادفی[1] nتایی از متغیر تصادفی X با تابع توزیع $F_X(x)$، میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد. میانگین نمونه‌ای بر مبنای نمونهٔ تصادفی $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$، برابر است با:

$$\bar{X} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} X_i.$$

همچنین واریانس نمونه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱} \sum_{i=۱}^{n} (X_i - \bar{X})^۲.$$

[1] زمانی‌که از لفظ نمونهٔ تصادفی استفاده می‌شود، بدان‌معناست که همهٔ متغیرها مستقل و هم‌توزیع هستند.

احتمالاً تاکنون با این گزارهٔ معروف در آمار نظری روبه‌رو شده‌اید، که $\bar{X}$ و $S^۲$ از هم مستقل‌اند. شاید درک این موضوع کمی سخت باشد که $\bar{X}$ و $S^۲$، چگونه می‌توانند از هم مستقل باشند، در صورتی که هر کدام از X_iها هم در $\bar{X}$ و هم در $S^۲$ حضور دارند. از این‌رو با دو سوال اساسی زیر روبه‌رو هستیم:

۱. چگونه می‌توان ثابت کرد که $\bar{X}$ و $S^۲$ مستقل هستند؟

۲. چه کسی برای اولین بار و برای چه توزیعی، استقلال $\bar{X}$ و $S^۲$ را ثابت کرد؟

در پاسخ به سوال اول باید گفت که به طور کلی در نظریهٔ احتمال، شرط لازم و کافی برای اینکه دو متغیر تصادفی X و Y با تابع چگالی توأم $f_{X,Y}(x,y)$ از هم مستقل باشند، این است که بتوان $f_{X,Y}(x,y)$ را بر حسب

حاصل‌ضرب دو تابع جدا از هم که یکی برحسب x و دیگری برحسب y است، نوشت. یعنی:

$$f_{X,Y}(x,y) = g_X(x)h_Y(y).$$

برای ملاحظهٔ اثبات این موضوع به [۱] رجوع کنید. همچنین به‌عنوان یک رابطهٔ رایج‌تر، با فرض اینکه $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ به‌ترتیب توابع چگالی متغیرهای تصادفی X و Y باشند، آن‌گاه X و Y مستقل هستند، اگر و فقط اگر

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

اگر $E(X)$ و $E(Y)$ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ امید ریاضی مربوط به دو متغیر تصادفی X و Y باشند، آن‌گاه در صورت مستقل بودن X و Y خواهیم داشت:

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

همچنین می‌دانیم که کواریانس دو متغیر تصادفی X و Y برابر است با:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

در نتیجه اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند، آن‌گاه

$$Cov(X,Y) = 0.$$

این در صورتی است که عکس نقیض رابطهٔ بالا مهم‌تر از خود آن است. یعنی اگر $Cov(X,Y) \neq 0$، آن‌گاه X و Y مستقل نیستند. البته روش‌های دیگری نظیر استفاده از تابع مولد گشتاور برای بررسی استقلال متغیرهای تصادفی وجود دارد که در قسمت بعد به آن اشاره خواهد شد.

اما در رابطه با سوال دوم شاید کمی متعجب شوید اگر بگوییم که استقلال $\bar{X}$ و S^2 برای اولین بار توسط یک زمین‌شناس به جای یک آماردان یا ریاضیدان اثبات شده است. بررسی این موضوع به سال ۱۸۷۶ برمی‌گردد، درست زمانی‌که زمین‌شناس برجستهٔ آلمانی، فردریچ رابرت هِلمرت[2] (۱۸۴۳-۱۹۱۷) دو کتاب در زمینهٔ نظریهٔ خطاها و احتمال خطاهای مشاهده شده تحت نوع خاصی از تبدیلات خطی (که بعدها با نام تبدیلات هِلمرت[3] شهرت یافتند) به زبان آلمانی منتشر کرد [۹] و [۱۰].

شکل ۱: فردریچ رابرت هِلمرت.

هِلمرت ثابت کرد که اگر $X_1, X_2, ..., X_n$، یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1},$$

یا به عبارت بهتر $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

او این موضوع را به‌وسیلهٔ اعمال تبدیلاتی خطی (تبدیلات هِلمرت) بر روی مقادیر مشاهده شده از متغیر

[2]Fredrich Robert Helmert

[3]Helmert transformation

تصادفی X اثبات کرد. همچنین هِلمرت نشان داد که اگر $x_1, x_2, \cdots, x_n$، مقادیر مشاهده شده از نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ باشند، به‌طوری که $\bar{x}$ و s^2 به‌ترتیب میانگین و واریانس این مشاهدات باشند، با فرض اینکه خطای مقادیر مشاهده شده از میانگین آن‌ها به‌صورت

$$e_i = x_i - \bar{x},$$

تعریف شود، آنگاه تابع چگالی توأم $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ و $\bar{x}$ برابر است با [۱۴]:

$$f(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, \bar{x}) = \frac{n}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2 + n\bar{x}^2}{2\sigma^2}}. \quad (1)$$

از آنجایی‌که $e_i = x_i - \bar{x}$، در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = (n-1)s^2. \quad (2)$$

و بلافاصله با استفاده از رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) متوجه می‌شویم که s^2 و $\bar{x}$ مستقل هستند، زیرا اگر ضریب قسمت نمایی را به‌عنوان یک عدد ثابت مانند c در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$f(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, \bar{x}) = ce^{-\frac{(n-1)s^2 + n\bar{x}^2}{2\sigma^2}}$$

$$= c\underbrace{e^{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma^2}}}_{g(s^2)} \underbrace{e^{-\frac{n\bar{x}}{2\sigma^2}}}_{h(\bar{x})}.$$

و از این‌رو برای هر نمونهٔ تصادفی از توزیع نرمال، $\bar{X}$ و S^2 مستقل هستند.

هِلمرت در آلمان فرد معروفی بود و افتخارات زیادی نیز کسب کرد. او مدرک دکتری خود را در سال ۱۸۶۷ از دانشگاه لایپزیگ[۴] اخذ کرد. در سال ۱۸۷۰ او مدرس دانشگاه فنی در آخن[۵] بود و در سال ۱۸۷۲ او در همین دانشگاه به درجهٔ استادی رسید. هِلمرت از سال ۱۸۸۷ استاد زمین‌شناسی پیشرفته در دانشگاه برلین[۶] و مدیر موسسهٔ زمین‌شناسی بود. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۸] ارجاع می‌دهیم.

اگرچه هِلمرت و کارهای او در آلمان شناخته شده بودند، اما از آنجایی‌که کتاب‌های او به زبان آلمانی منتشر می‌شدند، مخاطب زیادی در دیگر کشورها نداشتند و همین موضوع باعث شد تا نتایجی که او در سال ۱۸۷۶ در کتاب‌های خودش منتشر کرده بود، سال‌ها بعد توسط آماردانان بزرگی نظیر رانلد فیشر [۷] (۱۸۹۰-۱۹۶۲) ، کارل پیرسون[۸] (۱۸۵۷-۱۹۳۶) و ویلیام سیلی گوسه[۹] (معروف به استیودنت[۱۰]) (۱۹۳۷-۱۸۷۶)، مجدداً بازتولید شوند [۱۴]. البته پیرسون در سال ۱۹۳۱ از این بابت که کار هِلمرت توسط «مدرسهٔ انگلیسی آماردانان» نادیده گرفته شده بود، عذر خواهی کرد و پیشنهاد داد که توزیع توأم $\bar{X}$ و S^2 باید به افتخار هِلمرت با نام او نامگذاری شود [۶] و [۱۲].

۲ توزیع توأم $\bar{X}$ و S^2

تحت گزاره‌هایی بسیار معروف در آمار نظری می‌دانیم که اگر $X_1, X_2, \cdots, X_n$ دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند،

[۴] Leipzig University

[۵] Aachen

[۶] Berlin University

[۷] Ronald Fisher

[۸] Karl Pearson

[۹] William Sealy Gosset

[۱۰] Student

آن‌گاه

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$$

و

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

آگاهی از توزیع اولیه دو متغیر تصادفی برای بدست آوردن توزیع توأم آن‌ها لازمهٔ کار است. بنابراین برای بدست آوردن توزیع توأم $\bar{X}$ و S^2 در توزیع نرمال، تنها کافیست که استقلال آن‌ها را بررسی کنیم. صرف‌نظر از نتایجی که هِلمرت در سال ۱۸۷۶ ارائه کرد [۹] و [۱۰]، آماردانان دیگری نیز استقلال $\bar{X}$ و S^2 را برای نمونهٔ تصادفی از توزیع نرمال نشان دادند و در واقع موضوع استقلال $\bar{X}$ و S^2 در توزیع نرمال یکی از موضوعات مورد علاقهٔ آماردانان در نیمهٔ اول قرن بیستم بود. برای مثال فیشر در سال ۱۹۲۰ اثباتی زیبا برای این موضوع ارائه کرد [۷]. در سال ۱۹۴۶، ویلیام کروسکال[۱۱] در مقاله‌ای با عنوان «توزیع هِلمرت[۱۲]»، اثباتی جالب برای نشان دادن استقلال میانگین و واریانس نمونه‌ای در توزیع نرمال ارائه نمود [۱۱]. بعدها در سال ۱۹۸۴، اثبات کروسکال در مقاله‌ای با همین عنوان توسط استفان م استیگلر[۱۳] و با اندکی تغییر، مجدداً منتشر شد [۱۳]. استیگلر اثبات کروسکال را براساس استقراء پی‌ریزی کرد و با فرض اینکه خواننده از مفاهیم و روابط آماری آگاهی کامل دارد، سعی کرده است که از هیچ تعریف، لم، قضیه و رابطه‌ای به عنوان پیش‌نیاز و قبل از ارائهٔ قضیهٔ اصلی استفاده نکند (البته این روشی است که معمولاً در مقالاتی که در مجلات بسیار معتبر چاپ می‌شوند، دیده می‌شود). از این‌رو خوانندگانی که اطلاعات کمی در زمینه‌ی آمار دارند نمی‌توانند به‌خوبی با اثبات قضیه ارتباط برقرار کنند. در این مقاله، ما با اضافه کردن اطلاعات بیشتری به آنچه در منبع [۱۳] توسط استیگلر آمده است، سعی داریم تا خواننده را با آگاهی بیشتری به سمت قضیهٔ اصلی (استقلال $\bar{X}$ و S^2 در توزیع نرمال) هدایت کنیم.

۱.۲ بررسی استقلال متغیرهای تصادفی نرمال با استفاده از کوواریانس

همان‌طور که در قسمت مقدمه اشاره شد، اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آن‌گاه کوواریانس آن‌ها برابر با صفر است، اما عکس این موضوع همواره برقرار نیست و صفر شدن کوواریانس دو متغیر تصادفی الزاماً استقلال آن‌ها را نتیجه نمی‌دهد. ولی در یک حالت خاص این موضوع به‌صورت دوطرفه برقرار است و آن زمانی است که متغیرها دارای توزیع نرمال باشند. برای اثبات این موضوع ابتدا باید با تابع مولد گشتاور توأم آشنا شویم.

تعریف (تابع مولد گشتاور توأم). *[۳] تابع مولد گشتاور توأم متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$، برابر است با:*

$$M_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2+...+t_nX_n}). \quad (۳)$$

اگر در رابطهٔ (۳)، قرار دهیم $n = 1$، آن‌گاه به تعریف تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی X خواهیم رسید:

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \quad (۴)$$

حال به لم زیر که با ارتباط برقرار کردن بین روابط (۳) و

---
[۱۱] William Kruskal

[۱۲] Helmert's Distribution

[۱۳] Stephen M. Stigler

(۴)، یکی از ویژگی‌های تابع مولد گشتاور توأم در ارتباط با استقلال متغیرهای تصادفی را بیان می‌کند توجه کنید.

لم ۱. [۳] متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n$ از هم مستقل هستند، اگر و فقط اگر

$$M_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i). \quad (5)$$

اثبات. طرف چپ تساوی (۵) را با علامت $*$ و طرف راست آن را با علامت $**$ نماد گذاری می‌کنیم. از این‌رو با شروع از $*$ داریم:

$$\overbrace{M_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)}^{*}=E(e^{t_1X_1+t_2X_2+...+t_nX_n})$$

$$=E(e^{t_1X_1}e^{t_2X_2}...e^{t_nX_n})$$

$$\stackrel{\text{بنا به استقلال}}{=}E(e^{t_1X_1})E(e^{t_2X_2})...E(e^{t_nX_n})$$

$$=M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)...M_{X_n}(t_n)=\overbrace{\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i)}^{**}.$$

از آنجایی‌که از $**$ نیز می‌توان به‌راحتی به $*$ بازگشت، در نتیجه اثبات کامل می‌باشد.

با ارجاع به [۱] می‌دانیم که تابع مولد گشتاور یک متغیر تصادفی نرمال به‌صورت زیر است:

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Longleftrightarrow M_X(t)=e^{(\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2)}.$$

همچنین اگر $X_1, X_2, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی از توزیع نرمال باشند، به‌طوری که

$$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), \quad \forall i=1,2,...,n,$$

و

$$Cov(X_i,X_j)=0, \quad \forall i\neq j, \quad \forall i,j=1,2,..,n,$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$M_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)=e^{(\sum_{i=1}^{n}\mu_it_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2t_i^2)}. \quad (6)$$

البته باید توجه داشت که فرم کلی تابع مولد گشتاور توأم برای متغیرهای تصادفی نرمال، زمانی که $Cov(X_i,X_j)\neq 0$، کمی پیچیده‌تر از رابطهٔ (۶) است و در آن از یک ماتریس مربع به نام **ماتریس واریانس-کوواریانس**[۱۴] استفاده می‌شود [۱]. حال در لم زیر ثابت می‌کنیم که در توزیع نرمال صفر شدن کوواریانس، استقلال متغیرها را نتیجه می‌دهد [۱].

لم ۲. فرض کنید که

$$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), \quad \forall i=1,2,3,...n.$$

در این صورت اگر

$$Cov(X_i,X_j)=0, \quad \forall i\neq j,$$

آن‌گاه X_iها مستقل هستند.

اثبات. تحت فرضیات قضیه، می‌دانیم که تابع مولد

[۱۴] Variance–Covariance matrix

گشتاور توأم متغیرهای $X_1, X_2, ..., X_n$ همان رابطهٔ (۶) است. بنابراین برای نشان دادن استقلال متغیرها کافیست که از لم ۱ استفاده کنیم. پس داریم:

$$M_{X_1,X_2,...,X_n}(t_1,t_2,...,t_n)$$

$$= e^{(\sum_{i=1}^{n}\mu_i t_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 t_i^2)} e^{(\sum_{i=1}^{n}\mu_i t_i)} e^{(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 t_i^2)}$$

$$= e^{(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2+...+\mu_n t_n)} e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2+\sigma_2^2 t_2^2+...+\sigma_n^2 t_n^2)}$$

$$= e^{(\mu_1 t_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2 t_1^2)} e^{(\mu_2 t_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2 t_2^2)} ... e^{(\mu_n t_n+\frac{1}{2}\sigma_n^2 t_n^2)}$$

$$= M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)...M_{X_n}(t_n).$$

از آنجایی‌که تابع مولد گشتاور توأم برابر است با حاصل‌ضرب توابع مولد گشتاور تک تک متغیرها، در نتیجه طبق لم ۱، متغیرها مستقل هستند.

۲.۲ استقلال $\bar{X}$ و S^2 در توزیع نرمال

در این بخش بر پایهٔ روش استقرای ریاضی و مشابه آنچه که در مرجع [۱۳] آمده است به اثبات قضیهٔ اصلی (استقلال $\bar{X}$ و S^2) می‌پردازیم. قبل از ارائهٔ قضیه لازم است بدانید که برای ساده‌سازی مفاهیم در جریان اثبات قضیه از نماد $\bar{X}_n$ به‌جای $\bar{X}$ و از نماد S_n^2 به‌جای S^2 استفاده می‌کنیم. همچنین به‌عنوان یک راهنمایی مفید در ارتباط با روند اثبات قضیه، باید به این موضوع اشاره کنیم که از دو گزارهٔ بسیار معروف زیر در اثبات قضیه استفاده خواهیم کرد:

گزاره ۱. *[۱] و [۵] اگر $X_1, X_2, \cdots, X_n$ مستقل باشند، آن‌گاه هر تابعی از X_n مستقل از هر تابعی از $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ است.*

گزاره ۲. *[۵] هر ترکیب خطی از متغیرهای نرمال دارای توزیع نرمال است.*

البته توجه داشته باشید که در جریان اثبات به این گزاره‌ها ارجاع داده نمی‌شود و آن‌ها را جزو دانسته‌های قبلی در نظر می‌گیریم.

حال با آگاهی از تمام مطالبی که تاکنون گفته شد، به ارائهٔ قضیهٔ اصلی می‌پردازیم.

قضیه. *اگر $X_1, X_2, \cdots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، آن‌گاه $\bar{X}_n$ و S_n^2 مستقل هستند.*

اثبات. برای اثبات از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

گام ۱ (پایهٔ استقراء): برای $n = 2$، داریم:

$$\bar{X}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \tag{7}$$

و

$$S_2^2 = (X_1 - \bar{X}_2)^2 + (X_2 - \bar{X}_2)^2$$

$$= (X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2})^2 + (X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2})^2$$

$$= (\frac{X_1 - X_2}{2})^2 + (\frac{X_2 - X_1}{2})^2$$

$$= \frac{1}{4}(X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 + X_1^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2X_1^2 - 4X_1X_2 + 2X_2^2) = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2}. \tag{8}$$

از آنجایی‌که طبق تساوی (۷) و (۸)، $\bar{X}_2$ تابعی از $X_1 +$

X_2 و S_2^2 تابعی از X_1-X_2 است، در نتیجه اگر X_1+X_2 و X_1-X_2 مستقل باشند، آنگاه $\bar{X}_2$ و S_2^2 نیز مستقل هستند. می‌دانیم که هر ترکیب خطی از متغیرهای نرمال خود دارای توزیع نرمال است. بنابراین از آنجایی که X_1+X_2 و X_1-X_2 ترکیباتی خطی از متغیرهای نرمال هستند پس خود نیز دارای توزیع نرمال می‌باشند. ابتدا کواریانس آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$Cov(X_1+X_2, X_1-X_2)$$

$$= E((X_1+X_2)(X_1-X_2)) - E(X_1+X_2)E(X_1-X_2)$$

$$= \overbrace{E(X_1^2-X_2^2)}^{\sigma^2+\mu^2-\sigma^2-\mu^2} - \overbrace{E(X_1+X_2)}^{2\mu}\overbrace{E(X_1-X_2)}^{0} = 0.$$

از این‌رو طبق لم ۲، X_1+X_2 و X_1-X_2 از هم مستقل هستند و در نتیجه $\bar{X}_2$ و S_2^2 نیز از هم مستقل‌اند.

گام ۲: فرض کنید نتیجهٔ فوق برای هر نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ n برقرار باشد (یعنی فرض کنید که $\bar{X}_n$ و S_n^2 مستقل باشند). از این‌رو ثابت می‌کنیم که برای هر نمونهٔ تصادفی با اندازه $n+1$ نیز این نتیجه برقرار است. ابتدا دو تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{X}_{n+1} = \frac{n\bar{X}_n + X_{n+1}}{n+1}. \qquad (9)$$

$$nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + \frac{n}{n+1}(X_{n+1}-\bar{X}_n)^2. \qquad (10)$$

از اینجا به بعد، در سه مرحله اثبات را ادامه می‌دهیم:

مرحلهٔ اول. $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و S_n^2 مستقل‌اند؛ زیرا در نمونهٔ تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ متغیر تصادفی X_{n+1} مستقل از همهٔ متغیرهای $X_1, X_2, \cdots, X_n$ می‌باشد، و از این‌رو از هر تابعی از آن‌ها نیز مستقل است و می‌دانیم که S_n^2 تابعی از $X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$ است. همچنین طبق فرض $\bar{X}_n$ نیز مستقل از S_n^2 می‌باشد. بنابراین هر تابعی از X_{n+1} و $\bar{X}_n$ مستقل است از S_n^2، که در اینجا تابع مورد نظر همان $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ است.

مرحلهٔ دوم. $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$ و S_n^2 مستقل‌اند؛ زیرا با همان استدلال مرحلهٔ اول هر تابعی از $\bar{X}_n$ و X_{n+1} مستقل است از S_n^2، که در این مورد تابع مورد نظر $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$ است.

مرحلهٔ سوم. $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$ مستقل‌اند؛ زیرا در یک نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ $n+1$ همواره $\bar{X}_n$ و X_{n+1} از هم مستقل هستند و به‌علاوه در مورد توزیع آن‌ها می‌دانیم که $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ و $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$. از طرف دیگر چون $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$ ترکیباتی خطی از $\bar{X}_n$ و X_{n+1} هستند، پس خود نیز دارای توزیع نرمال می‌باشند. پس اگر کواریانس $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$ را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$Cov(n\bar{X}_n + X_{n+1}, X_{n+1}-\bar{X}_n)$$

$$= E((n\bar{X}_n + X_{n+1})(X_{n+1}-\bar{X}_n))$$

$$-E(n\bar{X}_n + X_{n+1})\overbrace{E(X_{n+1}-\bar{X}_n)}^{0}$$

$$= E((n\bar{X}_n + X_{n+1})(X_{n+1}-\bar{X}_n))$$

$$= E(n\bar{X}_n X_{n+1} - n\bar{X}_n^2 + X_{n+1}^2 - \bar{X}_n X_{n+1})$$

$$= (n-1)\overbrace{E(\bar{X}_n X_{n+1})}^{\mu^2} - n\overbrace{E(\bar{X}_n^2)}^{\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2} + \overbrace{E(X_{n+1}^2)}^{\sigma^2+\mu^2} = 0.$$

بنابراین براساس لم ۲، $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و $(X_{n+1}-\bar{X}_n)$

مستقل هستند.

با توجه به مرحلهٔ اول، مرحلهٔ دوم و مرحلهٔ سوم، نتیجه می‌گیریم که $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و $(X_{n+1} - \bar{X}_n)$ و S_n^2 هر سه مستقل از هم هستند. پس هر تابعی از یکی از آن‌ها مستقل از هر تابعی از دوتای دیگری است. طبق تساوی (۹) و (۱۰) می‌دانیم که $\bar{X}_{n+1}$ تابعی از $(n\bar{X}_n + X_{n+1})$ و S_{n+1}^2 تابعی از $(X_{n+1} - \bar{X}_n)$ و S_n^2 است. پس $\bar{X}_{n+1}$ و S_{n+1}^2 مستقل هستند و اثبات پایان می‌یابد.

برای ملاحظهٔ یک اثبات دیگر از استقلال میانگین و واریانس نمونه‌ای در توزیع نرمال، خواننده را به [۵] ارجاع می‌دهیم. همچنین قضیه‌های معروف دیگری نیز وجود دارند که به بررسی استقلال آماره‌های بسنده می‌پردازند. از جمله این قضیه‌ها می‌توان به قضیهٔ باسو [۱۵] اشاره کرد [۴]. به‌عنوان یک منبع فارسی مناسب که به معرفی قضیهٔ باسو می‌پردازد، خواننده را به [۲] ارجاع می‌دهیم.

۳ نتیجه‌گیری

استقلال $\bar{X}$ و S^2 از موضوعات مهم در آمار نظری به‌شمار می‌رود و همواره دانشجویان رشتهٔ آمار در مقاطع مختلف با آن سروکار دارند. از این‌رو در این مقاله سعی شد با بهره‌گیری از آنچه که در منبع [۱۳] آمده است یک اثبات ساده برای این موضوع ارائه شود تا حتی افرادی که اطلاعات کمی در این زمینه دارند به‌خوبی آن را متوجه شوند. هدف دیگر مقاله معرفی زمین‌شناس برجستهٔ آلمانی، فردریچ رابرت هِلمرت و کارهای مهم او در زمینهٔ آمار بود. معمولاً در کتاب‌های آموزشی که به زبان فارسی منتشر می‌شوند اشاره‌ای به نام هِلمرت نمی‌شود، در حالی که برخی از دستاوردهای او نظیر استقلال $\bar{X}$ و S^2 یا این موضوع که $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع کای-دو با $n-1$ درجهٔ آزادی است، از مسائل مهم در رشتهٔ آمار هستند. اگرچه این موضوعات حدود سه دهه پس از هِلمرت توسط آمارداناني همچون کارل پیرسون، فیشر و استیودنت مجدداً ارائه شدند و اغلب همین افراد به‌عنوان ارائه دهندگان واقعی این موضوعات شناخته می‌شوند، اما در حقیقت خود این افراد هِلمرت را نخستین ارائه دهندهٔ این موضوعات می‌دانند و همان‌طور که در قسمت مقدمه اشاره شد، کارل پیرسون درخواست داشت که توزیع توأم $\bar{X}$ و S^2 با عنوان «توزیع هِلمرت» شناخته شود.

[۱۵] Basu's theorem

تقدیر و تشکر

از سردبیر محترم نشریهٔ دانشجویی آمار (ندا) و همچنین داور ناشناس به خاطر راهنمایی‌های مفیدشان تشکر به عمل می‌آید.

مراجع

[۱] راس، ش. (۲۰۰۲). مبانی احتمال. مترجمین: دکتر احمد پارسیان و دکتر علی زینل همدانی. (۱۳۸۳). اصفهان، نشر شیخ بهایی.

[۲] شمس، م. (۱۳۸۳). قضیه باسو و تعمیم های آن. نشریه دانشجویی آمار (ندا)، ۲، ۸-۱.

[۳] نیکوکار، م. و چلویان، م. آمار و احتمال (۱). (۱۳۸۹). تهران، گسترش علوم پایه، چاپ هشتم.

[۴] Basu, D. (1955). On statistics independent of a complete sufficient statistic. Sankhyā, 15, 377–380.

[۵] Casella, G and Berger, R. L. (2002) . Statistical inference. second edition. Thomson Learning, USA.

[۶] David, H. A. (1998). Early Sample Measures of Variability. Statistical Science, 13, 368-377.

[۷] Fisher, R. A. (1920). A mathematical examination of the methods of determining the accuracy of an observation by the mean error, and by the mean square error. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 80, 758-770.

[۸] Hald, A. (1998). A history of mathematical statistics from 1750 to 1930. Wiley, New York.

[۹] Helmert F. R. (1876). Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinliehen Beobachtungsfehlers direckter Beobachtungen gleicher Genauigket. Astr. Nachr, 88, 113–132.

[۱۰] Helmert F. R. (1876). Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 21, 192–218.

[۱۱] Kruskal, W. (1946). Helmert's distribution. The American Mathematical Monthly, 53, 435-438.

[۱۲] Pearson, K. (1931). Historical note on the distribution of the standard deviations of samples of any size drawn from an in denitely large normal parent population. Biometrika, 23, 416-418.

[۱۳] Stigler, S. M. (1984). Kruskal's proof of the joint distribution of $\bar{X}$ and S^2. The American Statistician, 38, 134-135.

[۱۴] Zabell, S. L. (2008). On Student's 1908 Article "The Probable Error of a Mean". Journal of the American Statistical Association, 103, 1-7.