

# توزیع نمایی خطی تعمیم‌یافته نمایی شده (EGLE)

آنی‌تا عبد‌الهی نانو‌پیشه  
گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

## چکیده

تعمیمی از توزیع نمایی خطی، به نام توزیع نمایی خطی تعمیم‌یافته، اخیراً توسط محمود و علم [۶] ارائه شد. توزیع‌های نمایی خطی تعمیم‌یافته دیگری، توسط سرهان و کاندو [۶، ۱۲] معرفی شدند. در مقاله حاضر دو تعمیم کلی از توزیع نمایی خطی ارائه می‌شود. این توزیع شامل زیر توزیع‌های در حالات خاص می‌باشد که بسیاری از آن‌ها توزیع‌هایی شناخته شده مانند توزیع وایبول نمایی شده هستند. این مدل همچنین مدلی انعطاف‌پذیر در تحلیل مجموعه داده‌های واقعی پیچیده می‌باشد. در این مقاله برخی از ویژگی‌های آماری توزیع جدید بررسی می‌شود. سه مجموعه از داده‌های واقعی، با استفاده از توزیع جدید، تحلیل می‌شوند و دلالت بر این دارند که توزیع نمایی خطی تعمیم یافته نمایی شده، مدلی موثر در تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی طول عمر می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: نظریه توزیع‌ها، نظریه برآورد، قابلیت اطمینان.

## ۱ مقدمه

همکاران<sup>۱</sup> [۸] و ژانگ و همکاران<sup>۲</sup> [۱۴] را ببینید. نمودارهای نرخ شکست وانی شکل، دارای بخش‌های میانی تقریباً مسطح می‌باشند و چگالی مربوط به آن‌ها، دارای یک برآمدگی مثبت است. به عنوان مثالی از نرخ شکست وانی شکل، می‌توان قابلیت اطمینان سیستم عامل را نام برد [۱۴]. مدل‌هایی که دارای تابع نرخ شکست وانی شکل هستند در تحلیل‌های قابلیت اطمینان و به طور مشخص در تجزیه و تحلیل هزینه‌ها و مدل‌بندی قابلیت اطمینان سیستم عامل، بسیار مفید هستند. زی و همکاران را ببینید [۱۳]. بسیاری از خانواده‌های پارامتری

توزیع نمایی خطی (LE) و زیرمدل‌هایش مانند توزیع‌های نمایی و رایلی، توزیع بسیار معروفی در مدل‌بندی داده‌های طول عمر و مدل‌بندی پدیده‌ها با نرخ شکست افزایشی می‌باشد. توزیع LE مدل پارامتری مناسبی را برای مدل‌بندی پدیده‌های کاهش‌ی، نرخ‌های شکست غیرخطی افزایشی، یا غیریکنواخت که دارای فرم‌های وانی شکل هستند و به طور رایج در مدل‌بندی قابلیت اطمینان سیستم عامل و مطالعات بیولوژیکی، کاربرد دارند، فراهم نمی‌کند. برای مطالعات بیشتر لای و

<sup>۱</sup>Lai

<sup>۲</sup>Zhang

مناسب هستند. در ادامه، مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است:

در بخش ۲ توزیع EGLE را تعریف می‌کنیم و در مورد برخی از زیرمدل‌هایش بحث می‌کنیم و تابع توزیع تجمعی (Cdf)، تابع چگالی احتمال (Pdf) و تابع مخاطره آن را ارائه می‌کنیم. فرمولی برای تولید نمونه‌های تصادفی از توزیع EGLE را در بخش ۲ ارائه می‌کنیم. در بخش ۳ برخی از ویژگی‌های آماری مهم توزیع EGLE مانند مد، میانه، چندک، گشتاورهای ترتیبی و مقدار چولگی و کشیدگی را بیان می‌کنیم. در بخش ۴ توزیع آماره‌های ترتیبی را ارائه می‌کنیم. برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم از چهار پارامتر این توزیع، در بخش ۵ ارائه می‌گردد. در بخش ۶، سه کاربرد از داده‌های واقعی و در نهایت در بخش ۷ نتیجه‌گیری بیان می‌شود. این مقاله همچنین شامل پیوست، برای ارائه جزئیات می‌باشد.

## ۲ توزیع EGLE

متغیر تصادفی نامنفی  $X$  دارای توزیع EGLE با بردار پارامتر  $\theta = C(a, b, c, d)$  است و آن را به صورت  $EGLE(a, b, c, d)$  یا  $EGLE(\theta)$  نمایش می‌دهیم اگر تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر باشد:

$$F(x; \theta) = [1 - e^{-(ax + \frac{b}{c}x^c)}]^d, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

که  $a, b \geq 0$  (یعنی  $a + b > 0$ ) و  $c, d > 0$ . دو پارامتر  $a, b$  پارامترهای مقیاس و دو پارامتر  $c, d$  پارامترهای شکل هستند. تابع چگالی احتمال توزیع EGLE به صورت

مختلف از این توزیع‌ها که دارای نرخ شکست وانی شکل هستند در دو دهه گذشته، ایجاد شده‌اند. یک بررسی خوب روی تعدادی از این مدل‌ها توسط فام و لای<sup>۳</sup> [۹] ارائه شده‌اند. از آن جمله توزیع وایبول نمایی شده (EW) می‌باشد که توسط مادهولکار و سریواستاوا<sup>۴</sup> [۷] پیشنهاد شد. اخیراً سرهان و کاندو<sup>۵</sup> [۱۲] توزیع نرخ شکست خطی تعمیم یافته (GLFR) و محمود و علم [۶] توزیع نمایی خطی (GLE) را ارائه کردند. توجه کنید که این سه توزیع (GLE، EW، GLFR) زیرمدل‌هایی از مدل ارائه شده می‌باشند. در این مقاله توزیعی چهار پارامتری به نام توزیع نمایی خطی تعمیم یافته نمایی شده (EGLE) ارائه می‌شود. با این امید که کاربردهایی را در رشته‌های مختلف از جمله تجزیه و تحلیل بقا، قابلیت اطمینان، زیست‌شناسی و ... ارائه دهد. یکی از اصلی‌ترین اهداف معرفی توزیع جدید اینست که شامل سه توزیع به عنوان زیر مدل می‌باشد. پارامتر چهارم این توزیع باعث انعطاف‌پذیری بیشتر این مدل در ارائه انواع مختلفی از داده‌های واقعی نسبت به زیرمدل‌هایش می‌باشد. به‌طور کلی توزیع EGLE تعمیمی از توزیع‌های GLE، GLFR، EW و توزیع نمایی تعمیم‌یافته GE [۵]، رایلی تعمیم‌یافته GR [۱۱]، و توزیع LE و چندین توزیع دیگر می‌باشد. توزیع GGLE با توجه به انعطاف‌پذیریش بر اساس تابع مخاطره اش، به عنوان توزیعی مناسب که کاربردهای مختلفی در مسائل مربوط به داده‌های بقا دارد، می‌باشد. توزیع EGLE برای داده‌هایی با نرخ شکست  $u$  شکل مناسب نیست اما بر اساس آزمون نیکویی برازش برخی از زیرمدل‌هایش مثل توزیع‌های GLE، GLFR، EW

<sup>۳</sup>Pham Lai

<sup>۴</sup>Mudholkar Srivastava

<sup>۵</sup>Sarhan kundu

زیر می باشد:

می شود:

$$f(x; \theta) = dc h_{LE}(x) (H_{LE}(x))^{c-1} e^{-(H_{LE}(x))^c} [1 - e^{-(H_{LE}(x))^c}]^{d-1}, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

$$f(x; \theta) = cd(a + bx) \left(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma\right)^{c-1} [1 - e^{-(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c}]^{d-1} e^{-(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

که  $H_{LE}(x) = H_{LE}(x; a, b) = (ax + b/\gamma x^\gamma)$  و  $h(x)_{LE} = h_{LE}(x; a, b) = a + bx$  به ترتیب تابع مخاطره تجمعی و تابع مخاطره توزیع  $LE$  هستند. نمودار تابع چگالی احتمال  $EGLE$ ، با استفاده از بردار پارامتر انتخابی  $\theta = c(A, B, C, D)$  در شکل ۱ ارائه شده‌اند. با توجه به این شکل متوجه می‌شویم که تابع چگالی احتمال توزیع  $EGLE$  به صورت تک نمایی یا چوله به راست می‌باشد.

یکی از مزایای این توزیع آنست که تابع توزیع تجمعی آن دارای فرمی بسته است و ما را قادر می‌سازد اعداد تصادفی را با استفاده از فرمول زیر تولید کنیم:

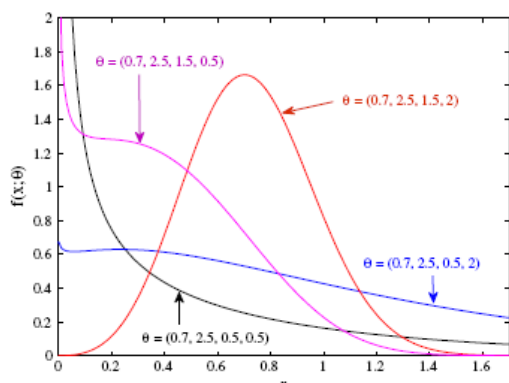
$$X = \begin{cases} -\frac{a}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{a^2 + 2b[-\ln(1 - U^{\frac{1}{d}})]^c}, & b \neq 0 \\ \frac{1}{a} [-\ln(1 - U^{\frac{1}{d}})]^{\frac{1}{c}}, & b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

که  $u$  دارای توزیع یکنواخت روی بازه  $(0, 1)$  است. فرمول (۳) برای تولید نمونه‌های تصادفی یک مجموعه عریض برای زیرمدلهایی از توزیع  $EGLE$  مانند توزیع‌های نمایی، نمایی تعمیم‌یافته، نمایی خطی تعمیم‌یافته، رایلی تعمیم‌یافته، نمایی خطی (نرخ شکست خطی)، نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته، نمایی خطی تعمیم‌یافته، وایبول و توزیع وایبول نمایی شده، به‌کار گرفته می‌شود.

اگر  $d$  یک عدد صحیح باشد توزیع  $EGLE(\theta)$  به صورت توزیع طول عمر از سیستم‌های موازی شامل  $d$  واحد مستقل و همانند که طول عمر آنها از توزیع  $GLE(a, b, c, d)$  پیروی می‌کند، بیان می‌شود. جدول ۱ خلاصه‌ای از جدیدترین زیر مدل‌ها که تابع نرخ مخاطره آنها به فرم  $u$  شکل است را نشان می‌دهد. تابع چگالی احتمال توزیع  $EGLE$ ، با استفاده از تابع مخاطره تجمعی و تابع نرخ مخاطره توزیع  $LE(a, b)$  به صورت زیر ارائه

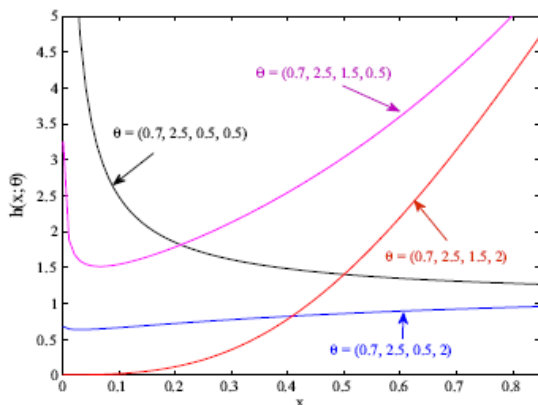
جدول ۱: تعدادی از جدیدترین زیر مدل‌های توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$

مدل	تابع توزیع	حالات خاص	مرجع
$EW(\sigma, c, d)$	$[1 - e^{-(x/\sigma)^c}]^d$	$b = 0, a = 1/\sigma$	[۷]
$GLFR(a, b, d)$	$[1 - e^{-(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^d}]$	$C = 1$	[۱۲]
$GLE(a, b, c)$	$1 - e^{-(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c}$	$d = 1$	[۶]



شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  به ازای  $\theta$  های مختلف

برازش مجموعه داده‌های طول عمر مختلف، می‌باشد. تابع چگالی احتمال توزیع EGLE در رابطه ۳ می‌تواند به صورت ترکیبی خطی از تابع چگالی احتمال توزیع GLE نوشته شود. برای  $d > 0$  بسط سری  $(1-w)^{d-1}$  برای  $|w| < 1$  به صورت زیر ارائه می‌شود:



شکل ۲: تابع مخاطره توزیع EGLE(a, b, c, d) به ازای  $\theta$  های مختلف

$$(1-w)^{d-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(d)}{\Gamma(d-j) j!} w^j \quad (6)$$

که  $\Gamma(0)$  تابع گاما می‌باشد. چون برای  $x > 0$ ،  $e^{-[H(x;\theta)]^c} < 1$  در این صورت با قرار دادن بسط سری رابطه ۶ در رابطه ۳ داریم:

$$f(x; \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(d+1)}{\Gamma(d-j) (j+1)!} f_{GLE}(x; (j+1)^{\frac{1}{c}} a, (j+1)^{\frac{1}{c}} b, c) \quad (7)$$

زمانی که  $d$  یک عدد صحیح مثبت است، اندیس  $j$  در رابطه ۷، در  $d-1$  متوقف می‌شود. ترکیب خطی رابطه ۷ برای به دست آوردن برخی از ویژگی‌های ریاضی توزیع EGLE به طور مثال، گشتاورها، تابع مولد گشتاور، تابع مشخصه و ... به طور مستقیم از توزیع GLE به کار گرفته می‌شود. برخی از نرم‌افزارها مانند MATLAB،

ساختار تابع توزیع تجمعی توزیع EGLE رابطه (۱) به دو روش زیر ارائه می‌شود:

(i) با افزایش تابع نرخ مخاطره تجمعی توزیع LE،  $H(x; a, b)$  جاگذاری شده در توزیع GLFE، با استفاده از پارامتر اختیاری  $C > 0$  یا

(ii) با افزایش تابع توزیع تجمعی  $GLEF_{GLE}(x; a, b, c)$  با توان اختیاری  $d > 0$ .

با در نظر گرفتن حالت (ii)،  $F_{GLE}(x; a, b, c)$  توزیع پایه است و  $F(x; \theta)$  ممکن است همان توزیع  $F_{GLE}(x; a, b, c)$  نمایشی شده باشد. رابطه بین تابع چگالی‌های احتمال متناظر به صورت زیر است:

$$f(x; \theta) = d[F_{GLE}(x; a, b, c)]^{d-1} f_{GLE}(x; a, b, c)$$

توجه کنید که برای  $d > 1$  و  $d < 1$  برای مقادیر بزرگتر (کوچکتر) از  $x$ ، عامل  $df_{GLE}(x; a, b, c)$  به ترتیب، بزرگتر (کوچکتر) و کوچکتر (بزرگتر) از آن است. این نکته دلالت بر این دارد که گشتاورهای ترتیبی متناظر با تابع چگالی احتمال رابطه ۳ دقیقاً بزرگتر (کوچکتر) از تابع چگالی احتمال متناظر با تابع چگالی احتمال  $f_{GLE}(x)$  زمانی که  $d > 1$  ( $d < 1$ ) است، می‌باشد. تابع مخاطره توزیع  $EGLE(\theta)$  به صورت زیر است:

$$h(x; \theta) = \frac{cd(a+bx)(ax + \frac{b}{c}x^2)^{c-1} [1 - e^{-(ax + \frac{b}{c}x^2)^c}]^{d-1} e^{-(ax + \frac{b}{c}x^2)^c}}{1 - [1 - e^{-(ax + \frac{b}{c}x^2)^c}]^d} \quad (8)$$

نمودارهای تابع مخاطره از توزیع EGLE برای مقادیر انتخابی از بردار پارامتر  $\theta = (a, b, c, d)$  در شکل ۲ ارائه شده‌اند. از این شکل متوجه می‌شویم که تابع مخاطره از توزیع EGLE تابعی کاهشی-افزایشی یا دارای فرم وانی شکل است که نشان دهنده انعطاف‌پذیری توزیع برای

MATHEMATICA و MAPLE برای محاسبه رابطه [۴] را ببینید  
 ۷ به طور عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

### ۲.۳ گشتاورها

به طور خاص، گشتاورها به طور کاربردی در تحلیل‌های آماری بسیار ضروری و با اهمیت هستند. آنها می‌توانند برای مطالعه ویژگی‌ها و مشخصه‌های با اهمیت یک توزیع، به کار گرفته شوند. (برای مثال میل کردن، پراکندگی، چولگی و کشیدگی). فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی رابطه ۳ باشد.  $K$  امین گشتاور ترتیبی از توزیع  $EGLE$  به صورت زیر است:

$$\mu_k(\theta) = E[X^k] = \int_0^{\infty} x^k f(x; \theta) dx$$

با استفاده از رابطه ۷ داریم:  
 (۱۰)

$$\mu_k(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(d+1)}{\Gamma(d-j) \Gamma(j+1)!} \mu_{k;GLE}((j+1)^{\frac{1}{c}} a, (j+1)^{\frac{1}{c}} b, c)$$

که  $\mu_{k;GLE}((j+1)^{\frac{1}{c}} a, (j+1)^{\frac{1}{c}} b, c)$  امین گشتاور ترتیبی توزیع  $GLE$  با پارامترهای  $(j+1)^{\frac{1}{c}} a, (j+1)^{\frac{1}{c}} b, c$  است. با استفاده از معادله ۹ در [۶] داریم:

$$\mu_{k;GLE}(a, b, c) = \sum_{i=0}^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{i} \binom{\frac{1}{c}(k-i)}{l} \frac{(-1)^i 2^{\frac{k-i}{c}} l a^{2l+i} \Gamma(\frac{k-i}{2c} - \frac{1}{c} + 1)}{c^{\frac{k+i}{c}+l}} \Gamma(\frac{k-i}{2c} - \frac{1}{c} + 1)$$

(۱۱)

اگر  $d$  یک عدد صحیح مثبت باشد، حد بالا در مجموع درونی رابطه ۱۰،  $d-1$  خواهد بود. این نتیجه، کاربردی مفید از ترکیب خطی نامتناهی تابع چگالی احتمال  $EGLE$  را نشان می‌دهد.

### ۳ ویژگی‌های آماری

در این بخش برخی از ویژگی‌های آماری از قبیل شاخص‌های مرکزی و گشتاورها مورد بررسی قرار گرفته است.

#### ۱.۳ میانگین، میانه، مد

میانگین توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  دارای فرم واضح و روشنی نمی‌باشد. با این حال به صورت ترکیب خطی از میانگین توزیع  $GLE(a^*, b^*, c^*)$  با مقادیر مختلف  $a^*, b^*$  بیان می‌شود. در ادامه، گشتاورهای مختلف از توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  را ارائه خواهیم کرد. چارک  $x_q$  توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  به آسانی از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$x_q = \frac{1}{b} \left\{ -a + \sqrt{a^2 + 2b[-\ln(1 - q^{\frac{1}{c}})]^{\frac{1}{c}}} \right\} \quad (۸)$$

با استفاده از رابطه ۸، میانه توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  با قرار دادن  $q = 1/2$  به دست می‌آید. مد یا نمای توزیع با حل معادله نامنفی غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$(a + bx)^2 [c - 1 + c(d - 1)(ax + \frac{b}{c}x^2)^c (1 - e^{-(ax + \frac{b}{c}x^2)^c}) - (ax + \frac{b}{c}x^2)[b - (a + bx)(ax + \frac{b}{c}x^2)^c] = 0$$

(۹)

در حالت کلی به دست آوردن راه حل واضحی برای رابطه ۹ امکان‌پذیر نیست. برای حل، از روش‌های عددی مثل روش تنصیف یا روش نقطه ثابت استفاده می‌شود. مرجع

تجمعی رابطه ۳ و ۱ باشند. فرض کنید  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  نشان‌دهنده آماره‌های ترتیبی به دست آمده از این نمونه باشند. حال تابع چگالی احتمال  $X_{r:n}$  که  $f_{r:n}(x, \theta)$  نامیده می‌شود و گشتاورهای  $r = 1, 2, 3, \dots, n$  را به دست می‌آوریم. بنابراین مقدار چولگی و کشیدگی توزیع  $X_{r:n}$  ارائه می‌شوند. تابع چگالی احتمال  $X_{r:n}$  به صورت زیر است:

$$f_{r:n}(x; \theta) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} [F(x; \theta)]^{r-1} [1 - F(x; \theta)]^{n-r} f(x; \theta) \quad (14)$$

که  $f(x; \theta)$  و  $F(x; \theta)$  به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع  $EGLE(\theta)$  ارائه شده در رابطه ۳ و ۱ هستند و  $B(0, 0)$  تابع بتا می‌باشد. چون  $0 < F(x; \theta) < 1$ ، برای هر  $x > 0$  می‌توانیم بسط سری دو جمله‌ای را برای  $[1 - F(x; \theta)]^{n-r}$  به کار بگیریم. با استفاده از:

$$[1 - F(x; \theta)]^{n-r} = \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j [F(x; \theta)]^j \quad (15)$$

داریم:

$$f_{r:n}(x; \theta) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} f(x; a, b, c, d) \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j [F(x; a, b, c, d)]^{r+j-1} \quad (16)$$

با جایگذاری روابط ۳ و ۱ در رابطه ۱۶ داریم:

$$f_{r:n}(x; \theta) = \sum_{j=0}^{n-r} \frac{(-1)^j n!}{j!(r-1)!(n-r-j)!(r+j)} f(x; a, b, c, (r+j)d) \quad (17)$$

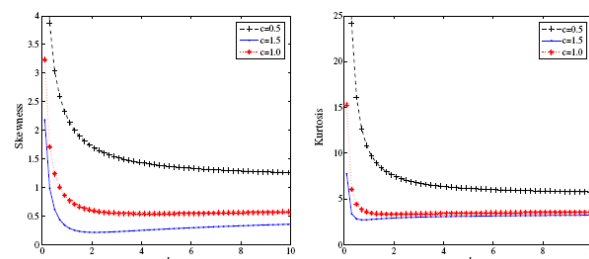
رابطه ۱۷ نشان می‌دهد که  $f_{r:n}(x, \theta)$  متوسط وزنی توزیع نمایی خطی نمایی شده با پارامترهای شکل مختلف می‌باشد. با استفاده از روابط ۷ و ۱۰ و ۱۶،  $K$  آمین

بر اساس چهارگشتاور ترتیبی اول توزیع  $EGLE$ ، مقدار چولگی  $\alpha(\theta)$  و کشیدگی  $k(\theta)$  از توزیع  $EGLE$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha(\theta) = \frac{\mu_3(\theta) - 3\mu_1(\theta)\mu_2(\theta) + 2\mu_1^2(\theta)}{[\mu_2(\theta) - \mu_1^2(\theta)]^{3/2}} \quad (12)$$

و

$$k(\theta) = \frac{\mu_4(\theta) - 4\mu_1(\theta)\mu_2(\theta) + 6\mu_1^2(\theta)\mu_2(\theta) - 3\mu_1^4(\theta)}{[\mu_2(\theta) - \mu_1^2(\theta)]^{3/2}} \quad (13)$$



شکل ۳: نمودارهایی از چولگی و کشیدگی توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  برای تعدادی از مقادیر  $a = 0.7, b = 2.5, c = 0.5, 1.0, 1.5$

نمودارهای چولگی و کشیدگی توزیع  $EGLE$  برحسب  $d$  برای مقادیر انتخابی از  $a = 0.7, b = 2.5$  و  $c = 0.5, 1.0, 1.5$  ارائه شده‌اند. شکل نشان می‌دهد که:

۱-  $\alpha(\theta)$  و  $k(\theta)$  وقتی  $d$  افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابند زمانی که  $c < 1$  باشد.

۲- وقتی  $c \geq 1$  باشد،  $\alpha(\theta)$  و  $k(\theta)$  وقتی  $d$  افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابند و سپس افزایش می‌یابند.

## ۴ آماره‌های ترتیبی

فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $EGLE(\theta)$  به ترتیب با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع

گشتاور ترتیبی از  $i$  امین آماره ترتیبی یک ترکیب خطی از مولفه‌های بردار  $U(\Theta) = (U_a, U_b, U_c, U_d)$  به صورت زیر  $K$  امین گشتاور توزیع  $GLE$  با پارامترهای شکل مختلف هستند: را می‌توانیم ارائه کنیم.

$$U_a = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a + bx_i} + (c-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma}$$

$$= -c \sum_{i=1}^n x_i (ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^{c-1} + c(d-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i (ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^{c-1}}{1 - e^{-(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c}} + c(d-1)$$

$$- (N-n) \frac{Tdc(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c e^{(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c} [1 - e^{(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c}]^{d-1}}{1 - [(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c]^d}$$

## ۵ برآورد و استنباط

(۱۹) در این بخش برآوردهای مدل ارائه شده را با استفاده از روش درست‌نمایی ماکسیمم در نمونه‌های سانسور شده از راست، بیان می‌کنیم. در نمونه‌های سانسور شده از راست، فرض می‌کنیم که  $N$  واحد مستقل همانند، در آزمون طول عمر وجود دارند. این آزمون بعد از یک مدت زمان مشخص  $T$  پایان می‌پذیرد. مشاهدات به دست آمده از این آزمون به صورت زیر هستند:

$$U_b = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a + bx_i} + \frac{(c-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma}$$

$$= -\frac{c}{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i^\gamma (ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^{c-1} + \frac{c(d-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma (ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^{c-1} e^{(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c}}{1 - e^{(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c}} - \frac{(N-n)}{\gamma}$$

$$\times \frac{T^\gamma dc(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c} [1 - e^{(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c}]^{d-1}}{1 - [(1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c})]^d}$$

$n.T.N =$  تعداد واحدهای از کار افتاده قبل از زمان سانسور شده  $T$  و طول عمرهای این  $n$  واحد از کار افتاده فرض کنید، یک نمونه از راست سانسور شده باشد زمانی که طول عمر این واحدهای آزمون شده دارای توزیع  $EGLE$  با بردار پارامتر نامشخص  $\theta = (a, b, c, d)$  است. تابع لگاریتم درست‌نمایی،  $L(\theta)$  برای  $\theta$  به صورت زیر است:

$$L(\theta) = n \ln d + n \ln c$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln(a + bx_i) + (c-1) \sum_{i=1}^n \ln(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)$$

$$- \sum_{i=1}^n \ln(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c + (d-1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c})$$

$$+ (N-n) \{1 - [1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c}]^d\} \quad (18)$$

$U_c$  برای  $a, b, c, d$  به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$(\hat{a} \pm Z_{\alpha/2} SE(\hat{a})), (\hat{b} \pm Z_{\alpha/2} SE(\hat{b})),$$

$$(\hat{c} \pm Z_{\alpha/2} SE(\hat{c})), (\hat{d} \pm Z_{\alpha/2} SE(\hat{d}))$$

که  $Z_{\alpha/2}$  چندک  $(1 - \alpha/2)$  از توزیع نرمال استاندارد و  $SE(\hat{\theta})$  جذر عناصر روی قطر  $I(\hat{\theta})^{-1}$  برای هر پارامتر هستند. انواع مختلفی از آزمون‌های نیکویی برازش برای آزمون بیشترین مقدار توزیع  $EGLE$  در مقایسه با تعدادی دیگر از مدل‌ها به کار گرفته می‌شوند. در بخش ۶ آزمون کلموگروف-اسمیرنوف ( $K-S$ ) به صورت یک آزمون ناپارامتری و آزمون نسبت درستنمایی ( $LR$ ) به صورت یک آزمون پارامتری برای نشان دادن مقایسه توزیع  $EGLE$  با توزیع‌های  $GLE, GLFR, EW, LFR$  و برای برازش مجموعه داده‌های واقعی به کار گرفته شده‌اند.

## ۶ تحلیل داده‌ها

در این بخش سه مجموعه از داده‌های واقعی (دو مجموعه کامل و یک مجموعه سانسور شده) برای نشان دادن کارایی توزیع  $EGLE$  به طور عملی، مورد تحلیل قرار می‌گیرند. اولین مجموعه از داده‌ها یک نمونه شامل ۵ مولفه [۲، ۶] می‌باشند که شکل نرخ مخاطره آن به صورت  $u$  شکل است. دومین مجموعه از داده‌ها نمونه‌ای شامل ۴۰ بیمار می‌باشد که در منابع اباما و همکاران [۱] ارائه شده است که نرخ شکست آن افزایشی است. سومین مجموعه از داده‌ها که به صورت سانسور شده شامل ۸۲ زندانی در مکان‌های مختلف خاورمیانه است که نرخ شکست آن

$$= \frac{n}{c} + \sum_{i=1}^n \ln(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)$$

$$- \sum_{i=1}^n \{ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma\}^c \ln\{ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma\}$$

$$(d-1) \sum_{i=1}^n \frac{(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c e^{(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c} \ln(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)}{1 - e^{(ax + \frac{b}{\gamma} x^\gamma)^c}}$$

$$- (N-n)$$

$$\frac{d(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c} [1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c}]^{d-1} \ln(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)}{1 - [(1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c})]^d}$$

(۲۱)

و

$$U_d = \frac{n}{d} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c})$$

$$- (N-n) \frac{\ln(1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c})}{(1 - e^{-(aT + \frac{b}{\gamma} T^\gamma)^c})^d - 1}$$

(۲۲)

با برابر صفر قرار دادن این عبارت‌ها،  $U(\Theta) = 0$  و حل توأم آنها، برآورد درستنمایی ماکسیمم  $\hat{\theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d})^T$  برای چهار پارامتر به دست می‌آید. دستگاه این چهار معادله غیرخطی به طور عددی حل نمی‌شود و نرم‌افزارهای ریاضی یا آماری برای حل عددی، با استفاده از تکنیک‌های بازگشتی مثل روش نیوتن رافسون باید به کار گرفته شوند. برای برآورد بازه‌ای متقارن چهار پارامتر  $a, b, c, d$ ، ماتریس اطلاع فیشر را به دست می‌آوریم. عناصر ماتریس اطلاع مشاهده شده  $4 \times 4$ ،  $I(\theta) = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta \partial \theta^T}$ ، در پیوست A ارائه شده اند. توزیع نرمال چندمتغیره  $N_4(0, I(\hat{\theta}^{-1}))$  در ساختن بازه‌های اطمینان برای پارامترها کاربرد دارند. بازه‌های اطمینان  $(1 - 100)$



به صورت  $u$  شکل است. برای هر مجموعه از داده‌ها، نتایج برازش توزیع‌های  $EW$  و  $EGLE, GLE, GLFR$  را با هم مقایسه می‌کنیم. دلایل اصلی مقایسه مدل جدید با مدل‌های  $GLE, GLFR$  و  $EW$  اینست که:

۱- مدل جدید تعمیمی از این سه مدل است.

۲- تابع نرخ مخاطره این چهار مدل دارای شکل افزایشی - کاهشی یا  $u$  شکل است. بنابراین توزیع  $EGLE$  را با توزیع وایبول ( $W$ ) و توزیع نرخ شکست ( $LFR$ ) مقایسه می‌کنیم.

دلیل اصلی مقایسه توزیع  $EGLE$  با توزیع وایبول ( $W$ ) و توزیع نرخ شکست ( $LFR$ ) اینست که مناسب بودن این توزیع جدید چهار پارامتری را نسبت به توزیع‌های دو پارامتری ساده‌تر، نشان دهیم. پنج آزمون فرض صفر را در نظر می‌گیریم:

۱-  $d = 1$ : داده‌ها از توزیع  $GLE(a, b, c)$  پیروی می‌کنند.

۲-  $c = 1$ : داده‌ها از توزیع  $GLFR(a, b, d)$  پیروی می‌کنند.

۳-  $b = 0, a = \frac{1}{\sigma}$ : داده‌ها از توزیع  $EW(\sigma, c, d)$  پیروی می‌کنند.

۴-  $b = 0, a = \frac{1}{\sigma}, d = 1$ : داده‌ها از توزیع  $W(\sigma, c)$  پیروی می‌کنند.

۵-  $c = 1, d = 1$ : داده‌ها از توزیع  $LFR(a, b)$  پیروی می‌کنند که برخلاف فرض مقابل  $H_a$  به صورت زیر است:

داده‌ها از توزیع  $EGLE(a, b, c, d)$  پیروی می‌کنند:  $H_a$

## ۱.۶ داده‌های زمانی یک دستگاه

مجموعه داده‌های مربوط به طول عمر ۵۰ دستگاه توسط آرست [۲] ارائه شده است. جدول ۲ مقادیر این مجموعه از داده‌ها را نشان می‌دهد. جدول ۳ برآورد درستنمایی ماکسیمم شاخص‌های پارامترها را برای هر توزیع به‌کار گرفته شده و مقادیر آزمون آماری  $k-s$  و مقدار  $P$ -متناظر با آن را برای ۶ مدل به‌کار گرفته شده نشان می‌دهد. در شکل ۴ و ۵ به ترتیب تابع بقا و مخاطره پارامتری و تجربی مجموعه داده‌های یک دستگاه ارائه شده‌اند. از جدول ۳ بر مبنای مقدار  $P$ -متناظر با  $k-s$  نتیجه می‌شود که:

۱- توزیع وایبول در هر سطح معناداری  $\alpha \geq 0.005$  رد می‌شود.

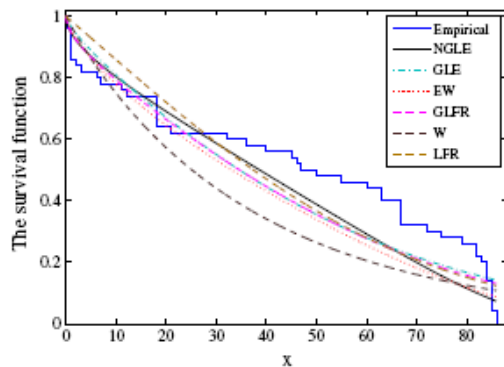
۲- توزیع  $LFR$  در هر سطح معناداری  $\alpha \geq 0.04$  رد می‌شود.

۳- توزیع  $EW$  در هر سطح معناداری  $\alpha \geq 0.06$  رد می‌شود.

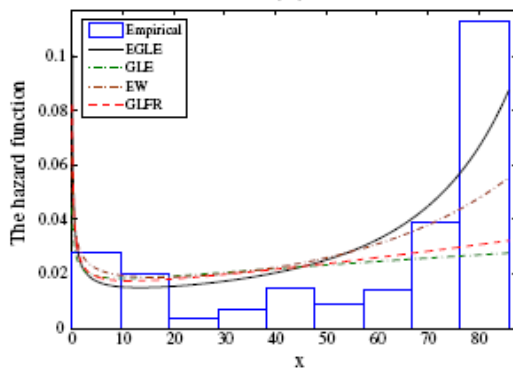
۴- هر دو توزیع  $EW$  و  $GLFR$  در هر سطح معناداری  $\alpha \geq 0.14$  رد می‌شود.

۵- توزیع  $EGLE$  در  $\alpha \leq 0.21$  رد نمی‌شود.

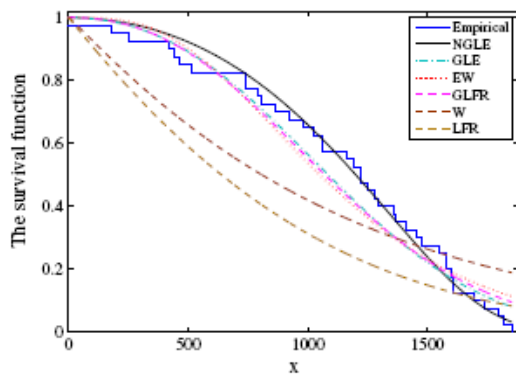
۶- توزیع  $EGLE$  بهترین توزیع به‌کار گرفته شده در برازش مجموعه داده‌ها بر اساس بالاترین مقدار  $P$ -مقدار می‌باشد.



شکل ۴: تابع بقای تجربی و برآورد شده از مدل‌های  $EGLE, GLE, GLFR, EW, W$  و  $LFR$  برای داده‌های یک دستگاه



شکل ۵: تابع مخاطره تجربی و برآورد شده از مدل‌های  $EGLE, GLE, GLFR$  و  $EW$  برای داده‌های یک دستگاه



شکل ۶: تابع بقای تجربی و برآورد شده از مدل‌های  $EGLE, GLE, GLFR, EW, W$  و  $LFR$  برای داده‌های لوکمی

برای مقایسه پارامتری، آماره‌های آزمون نسبت درست‌نمایی ( $LR$ )،  $\Lambda_{H_0} = 2(\mathcal{L}H_\alpha - \mathcal{L}H_0)$  را برای آزمون فرض صفر در برابر فرض مقابل ارائه شده در بالا، به کار می‌بریم. بعلاوه ناحیه اطلاعات آکائیک ( $AIC$ ) که توسط آکائیک<sup>۲</sup> [۳] ارائه شد، به عنوان بهترین مدل در بین چندین مدل انتخاب شده است. که مقدار آن  $AIC = -2\mathcal{L}_{model} + 2p_0$  است، که  $P$  تعداد شاخص پارامترهای مدل می‌باشد. بهترین مدل برای برازش داده‌ها، مدلی با کمترین  $AIC$  است. جدول ۴ فرض  $H_0$ ، مقادیر تابع لگاریتم درست‌نمایی تحت فرض  $H_0$ ؛  $\mathcal{L}H_0$ ، مقادیر آماره آزمون درست‌نمایی  $\Lambda_{H_0}$ ، درجه آزادی  $df$ ، مقدار  $P$  و  $AIC$  متناظر با آنها را ارائه می‌دهد. از مقدار  $P$  متوجه می‌شویم که همه فرض‌های صفر در سطح معناداری  $\alpha \geq 1/9 \times 10^{-3}$  رد می‌شوند. همچنین توزیع  $EGLE$  دارای کمترین  $AIC$  است. این نتیجه می‌دهد که توزیع  $EGLE$  بهترین مدل در بین همه توزیع‌های مورد استفاده در برازش مجموعه داده‌های خطی می‌باشد. این نتایج بر مبنای آزمون  $K-S$  که در بالا اشاره شد، مورد تأیید قرار می‌گیرند.

جدول ۲: (اطلاعات دستگاه) طول عمر ۵۰ دستگاه [۲]

	۱	۲	۱	۱	۱	۱	۲	۳	۶
۰/۱	۷	۱۱	۱۲	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۲۱	۳۲
۰/۲	۳۶	۴۰	۴۵	۴۶	۴۷	۵۰	۵۵	۶۳	۶۳
۱	۶۷	۶۷	۶۷	۶۷	۷۲	۷۵	۷۹	۸۲	۸۳
۱	۸۴	۸۴	۸۴	۸۵	۸۵	۸۵	۸۵	۸۶	۸۶

جدول ۳: برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها، مقادیر  $k-s$  و مقدار  $P$ - برای داده‌های یک دستگاه

مدل	MLE	K-S	P-مقدار
$W(\sigma, c)$	$\hat{\sigma} = 44/913, \hat{c} = 0/949$	0/2397	0/0052
$LFR(a, b)$	$\hat{a} = 0/014, \hat{b} = 2/4 \times 10^{-4}$	0/1955	0/0370
$EW(\sigma, c, d)$	$\hat{\sigma} = 91/023, \hat{c} = 4/69, \hat{d} = 0/146$	0/1841	0/0590
$GLFR(a, b, d)$	$\hat{a} = 3/822, \hat{b} = 3/074 \times 10^{-4}, \hat{d} = 0/533$	0/1620	0/1293
$GLE(a, b, c)$	$\hat{a} = 9/621 \times 10^{-3}, \hat{b} = 4/52 \times 10^{-4}, \hat{c} = 0/73$	0/1598	0/1391
$EGLE(a, b, c, d)$	$\hat{a} = 3/307 \times 10^{-3}, \hat{b} = 1/738 \times 10^{-4}, \hat{c} = 4/564, \hat{d} = 0/112$	0/1475	0/2055

جدول ۴: آماره‌های آزمون  $L, H_0$  و  $LR$ ، مقدار  $P$  و  $AIC$  برای داده‌های یک دستگاه

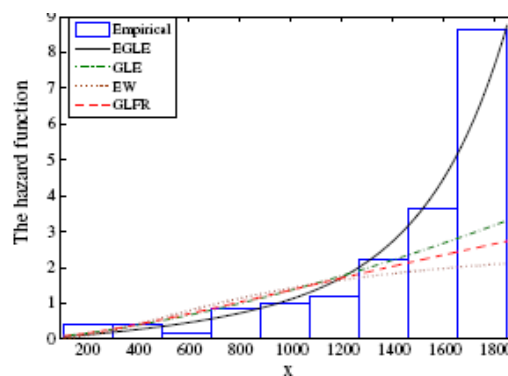
مدل	$H_0$	$LH_0$	$\Delta H_0$	df	P-مقدار	AIC
$W(\sigma, c)$	$b = 0, a = 1/2, d = 1$	-214/002	33/330	2	$5/787 \times 10^{-8}$	486/004
$LFR(a, b)$	$c = 1, d = 1$	-238/064	27/454	2	$1/093 \times 10^{-6}$	480/128
$EW(\sigma, c, d)$	$d = 1$	-235/926	23/178	1	$1/477 \times 10^{-6}$	370/240
$GLFR(a, b, d)$	$c = 1$	-233/145	17/616	1	$2/703 \times 10^{-5}$	369/173
$GLE(a, b, c)$	$b = 0, a = 1/2$	-229/114	9/554	1	$1/995 \times 10^{-3}$	360/464
$EGLE(a, b, c, d)$	$LH_0$	-224/337	-	-	-	358/502

جدول ۵: برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها، مقادیر  $k-s$  و مقدار  $P$ - برای داده‌های لوکمی

مدل	MLE	K-S	P-مقدار
$LFR(a, b)$	$\hat{a} = 9/501, \hat{b} = 4/229 \times 10^{-7}$	0/3585	$4/143 \times 10^{-5}$
$W(\sigma, c)$	$\hat{\sigma} = 1143/3, \hat{c} = 2/4 \times 10^{-4}$	0/2680	0/005
$EW(\sigma, c, d)$	$\hat{\sigma} = 734/185, \hat{c} = 1/265, \hat{d} = 2/973$	0/1321	0/4494
$GLFR(a, b, d)$	$\hat{a} = 2/102 \times 10^{-3}, \hat{b} = 1/389 \times 10^{-6}, \hat{d} = 1/553$	0/1183	0/5884
$GLE(a, b, c)$	$\hat{a} = 7/591 \times 10^{-5}, \hat{b} = 1/131 \times 10^{-6}, \hat{c} = 1/260$	0/1105	0/6727
$EGLE(a, b, c, d)$	$\hat{a} = 3/278 \times 10^{-5}, \hat{b} = 7/147 \times 10^{-7}, \hat{c} = 3/410, \hat{d} = 0/333$	0/0917	0/8591

## ۲.۶ داده‌های لوکمی

جدول ۷ مجموعه داده‌های مطالعه شده توسط اباما و همکاران [۱] را که نشان دهنده طول عمر ۴۰ بیمار لوکمی از یکی از بیمارستان‌های وزارت بهداشت و درمان در عربستان سعودی است را ارائه می‌دهد.



شکل ۷: تابع مخاطره تجربی و برآورد شده از مدل‌های  $EW$  و  $EGLE, GLE, GLFR$  برای داده‌های لوکمی

<sup>۷</sup>Akaike

جدول ۶: برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها، مقادیر لگاریتم درستنمایی، مقدار P- و AIC برای داده‌های لوکمی

مدل	$H_0$	$LH_0$	$\Lambda_{H_0}$	df	مقدار-P	AIC
$W(\sigma, c)$	$b = 0, a = 1/2, d = 1$	-۳۱۹/۸۷۴	۳۸/۵۵۵	۲	$۴/۲۴۵ \times 10^{-۹}$	۶۴۳/۷۴۷
$LFR(a, b)$	$c = 1, d = 1$	۳۱۸/۴۵۸	۳۵/۷۲۳	۲	$1/۷۴۹ \times 10^{-۸}$	۶۴۰/۹۱۶
$EW(\sigma, c, d)$	$b = 0, a = 1/2$	-۳۰۸/۹۳۳	۱۶/۶۷۴	۱	$۴/۴۳۸ \times 10^{-۵}$	۶۲۳/۸۶۶
$GLFR(a, b, d)$	$c = 1$	-۳۰۵/۳۳۸	۹/۴۸۴	۱	$۲/۰۷۲ \times 10^{-۳}$	۶۱۶/۶۷۷
$GLE(a, b, c)$	$d = 1$	-۳۰۴/۱۱۱	۷/۰۲۹	۱	$۸/۰۱۹ \times 10^{-۳}$	۶۱۴/۲۲۲
$EGLE(a, b, c, d)$	$LH_0$	۳۰۰/۵۹۶	-	-	-	۶۰۹/۱۹۲

۳- توزیع  $EGLE$  بهترین توزیع در میان همه توزیع‌های به‌کار گرفته شده در برازش مجموعه داده‌ها بر اساس بالاترین مقدار مقدار P- می‌باشد.

جدول ۷: (داده‌های لوکمی) طول عمر ۴۰ بیمار لوکمی

۱۱۵	۱۸۱	۲۵۵	۴۱۸	۴۴۱	۴۶۱	۵۱۶	۷۳۹	۷۷۳	۷۸۹
۸۰۷	۸۶۵	۹۲۴	۹۸۳	۱۰۲۴	۱۰۶۲	۱۰۶۳	۱۱۶۵	۱۱۹۱	۱۲۲۲
۱۲۲۲	۱۲۵۱	۱۲۷۷	۱۲۹۰	۱۳۵۷	۱۳۶۹	۱۴۰۸	۱۴۵۵	۱۴۷۸	۱۵۴۹
۱۵۷۸	۱۵۷۸	۱۵۹۹	۱۶۰۳	۱۶۰۵	۱۶۹۶	۱۷۳۵	۱۷۹۹	۱۸۱۵	۱۸۵۲

جدول ۶ فرض صفر  $H_0$ ، مقادیر تابع لگاریتم درستنمایی تحت فرض  $H_0, LH_0$ ، مقادیر آماره آزمون درستنمایی  $\Lambda_{H_0}$ ، درجه آزادی  $p - value, df, \Lambda_{H_0}$  و  $AIC$  متناظر با آنها را ارائه می‌دهد. از مقادیر مقدار P- متوجه می‌شویم که همه فرض‌های صفر در سطح معناداری  $\alpha \geq 10^{-3} \times 9/019$  رد می‌شوند. همچنین توزیع  $EGLE$  دارای کمترین  $AIC$  است. این نتیجه می‌دهد که توزیع  $EGLE$  بهترین مدل در بین همه توزیع‌های مورد استفاده در برازش مجموعه داده‌های خطی می‌باشد. این نتایج بر مبنای آزمون  $K - S$  که در بالا اشاره شد، مورد تأیید قرار می‌گیرند.

### ۳.۶ داده‌های مواد مخدر

این داده‌ها شامل نمونه‌ای تصادفی از ۸۲ زندانی که به دلیل مسئله مواد مخدر در زندان هستند و سپس همه آنها با هم عفو عمومی می‌شوند، می‌باشد. در مدت ۱۱۱ هفته، ۶۵ نفر از آنها بار دیگر به دلیل سوء مصرف مواد مخدر و یا فروش آن دستگیر شده‌اند. داده‌های طول عمر شامل زمان‌هایی است که زندانیان بعد از آزادی، به زندان بازگشتند. داده‌ها از یک زندان در خاورمیانه جمع‌آوری

شکل ۶ تابع بقا تجربی و برآورد شده را با استفاده از همه مدل‌ها نشان می‌دهد. شکل ۷ تابع مخاطره تجربی و برازش شده مدل‌ها را برای برازش به داده‌های لوکمی که هیچ‌یک رد نمی‌شوند، ارائه می‌دهد. شکل ۷ نشان می‌دهد که نرخ مخاطره برای مجموعه داده‌ها، افزایشی است لذا توزیع‌های  $EGLE, GLE, GLFR, EW, W$  برای برازش به این داده‌ها مناسب هستند. برای اینکه ببینیم کدامیک از این توزیع‌ها برای برازش به این مجموعه از داده‌ها مناسب‌تر است، برآورد درستنمایی ماکسیمم شاخص پارامترها را برای هر مدل محاسبه می‌کنیم و آماره‌های آزمون مختلف را برای مقایسه آنها به‌کار می‌گیریم. جدول ۵ برآوردهای درستنمایی ماکسیمم پارامترها را با استفاده از آزمون  $K - S$  و مقدار P- متناظر با آن را نشان می‌دهد.

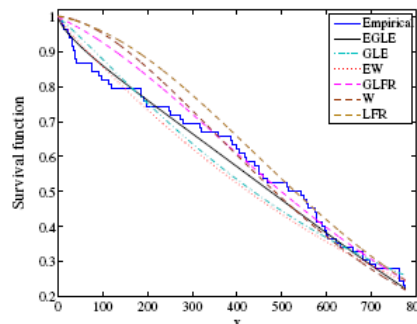
طبق مقدار P- متناظر با مقادیر  $K - S$ ، در جدول ۵ نتیجه می‌گیریم که:

۱- هر دو توزیع  $W$  و  $LFR$  در هر سطح معناداری  $\alpha \geq 0/005$  رد می‌شوند.

۲- هیچ کدام از چهار مدل  $EGLE, GLE, GLFR$  و  $EW$  در هر سطح معناداری رد نمی‌شوند.

شده‌اند.

را برای مجموعه داده‌های مواد مخدر نشان می‌دهد. شکل ۸؟ نشان می‌دهد که تابع مخاطره به صورت  $u$  شکل می‌باشد، بنابراین انتظار می‌رود که توزیع‌های  $EGLE, GLE, GLFR$  و  $EW$  برای برازش مناسب باشند. طبق مقدار  $P$ -متناظر با مقادیر  $K-S$ ، در جدول ۸ نتیجه می‌گیریم که:



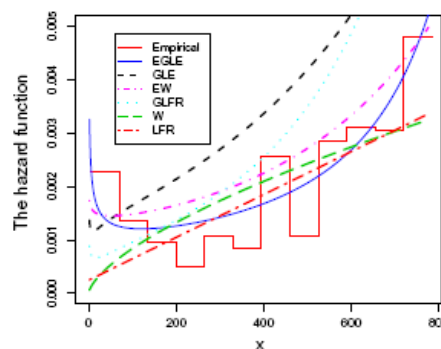
شکل ۸: تابع بقای تجربی و برازش شده از مدل‌های  $EGLE, GLE, GLFR, EW, W, LFR$  برای داده‌های مواد مخدر

۱- توزیع  $LFR$  در سطح معناداری  $\alpha \leq 0.0422$  رد می‌شود.

۲- مدل  $W$  در سطح معناداری  $\alpha \leq 0.0659$  رد می‌شود.

۳- هیچ کدام از چهار مدل  $EGLE, GLE, GLFR$  و  $EW$  در سطح معناداری  $\alpha \leq 0.2086$  رد نمی‌شوند.

۴- توزیع  $EGLE$  بهترین توزیع در میان همه توزیع‌های به کار گرفته شده در برازش مجموعه داده‌ها بر اساس بالاترین مقدار مقدار  $P$ -می‌باشد.



شکل ۹: تابع مخاطره تجربی و برازش شده از مدل‌های  $EGLE, GLE, GLFR, EW$  برای داده‌های مواد مخدر

برای مقایسه دقیق‌تر، تجزیه و تحلیل‌هایی را با استفاده از آماره آزمون نسبت درست‌نمایی انجام می‌دهیم. جدول ۹ فرض صفر  $H_0$ ، مقادیر تابع لگاریتم درست‌نمایی تحت فرض  $H_0$ ؛  $LH_0$ ، مقادیر آماره آزمون درست‌نمایی  $\Lambda_{H_0}$ ، درجه آزادی  $df, p$ -value و  $AIC$  متناظر با آنها را برای داده‌های مواد مخدر ارائه می‌دهد. از مقادیر مقدار  $P$ -متوجه می‌شویم که:

۱- هر دو توزیع  $LFR$  و  $W$  در سطح معناداری  $\alpha \geq 10^{-3} \times 7.705$  رد می‌شوند.

۲- توزیع  $GLFR$  در سطح اطمینان  $\alpha \geq 0.029$  رد می‌شود.

۳- توزیع  $GLE$  در سطح معناداری  $\alpha \geq 0.031$  رد می‌شود.

جدول ۸ برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها را برای همه توزیع‌های به کار گرفته شده، مقادیر آزمون‌های آماری  $K-S$  و مقدار  $P$ -متناظر با آن را برای مدل استفاده شده، نشان می‌دهد. شکل ۹؟ تابع‌های بقای تجربی و پارامتری را برای داده‌های مواد مخدر و شکل ۱۰؟ تابع‌های مخاطره تجربی و پارامتری

جدول ۸: برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها، مقادیر  $k - s$  و مقدار  $P$  برای داده‌های مواد مخدر

model	MLE	K-S	P-مقدار
$LFR(a, b)$	$\hat{a} = ۲/۴۷۳ \times ۱۰^{-۴}, \hat{b} = ۴/۰۰۲ \times ۱۰^{-۶}$	۰/۱۵۱۲	۰/۰۴۲۲
$W(\sigma, c)$	$\hat{\sigma} = ۶۰۳/۹۹۵, \hat{c} = ۱/۶۶$	۰/۱۴۲۱	۰/۰۶۵۹
$EW(\sigma, c, d)$	$\hat{\sigma} = ۸۵۸/۳۳۴, \hat{c} = ۱/۷۱۶, \hat{d} = ۰/۵۳۷$	۰/۱۰۹۴	۰/۲۶۰۲
$GLFR(a, b, d)$	$\hat{a} = ۱/۲۴ \times ۱۰^{-۴}, \hat{b} = ۳/۴۴۴ \times ۱۰^{-۴}, \hat{d} = ۰/۷۳۲$	۰/۱۱۵۴	۰/۲۰۸۵
$GLE(a, b, c)$	$\hat{a} = ۳/۴۴۵ \times ۱۰^{-۵}, \hat{b} = ۵/۴۲۷ \times ۱۰^{-۴}, \hat{c} = ۰/۵۸۲$	۰/۰۹۸۴	۰/۳۸۰۶
$EGLE(a, b, c, d)$	$\hat{a} = ۳/۲۷۸ \times ۱۰^{-۵}, \hat{b} = ۷/۱۴۷ \times ۱۰^{-۷}, \hat{c} = ۳/۴۱۰, \hat{d} = ۰/۳۳۳$	۰/۰۶۲۱	۰/۸۹۰۰

جدول ۹: برآورد درست‌نمایی ماکسیمم پارامترها، مقادیر لگاریتم درست‌نمایی، مقدار  $P$  و  $AIC$  برای داده‌های مواد مخدر

مدل	$H_0$	$LH_0$	$\Lambda_{H_0}$	df	P-مقدار	AIC
$W(\sigma, c)$	$b = 0, a = 1/2, d = 1$	-۲۰۸/۹۰۸	۱۱/۸۰۳	۲	$۲/۷۳۵ \times ۱۰^{-۳}$	۴۲۱/۸۱۵
$LFR(a, b)$	$c = 1, d = 1$	-۲۰۷/۸۷۲	۹/۷۳۲	۲	$۷/۷۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	۴۱۹/۷۴۴
$EW(\sigma, c, d)$	$b = 0, a = 1/\sigma$	-۲۰۴/۴۷۱	۲/۹۲۹	۱	۰/۰۸۷	۴۱۴/۹۴۱
$GLFR(a, b, d)$	$c = 1$	-۲۰۵/۴۰۰	۴/۷۸۹	۱	۰/۰۲۹	۴۱۶/۸۰۱
$GLE(a, b, c)$	$d = 1$	-۲۰۵/۳۴۵	۴/۶۷۸	۱	۰/۰۳۱	۴۱۶/۶۹۰
$EGLE(a, b, c, d)$	$LH_0$	۲۰۳/۰۰۶	-	-	-	۴۱۴/۰۱۲

۴- توزیع  $EW$  در سطح معناداری  $\alpha \geq ۰/۰۸۷$  رد می‌شود. استفاده از توزیع جدید مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت و مقایسه‌ای با سه زیر مدل اشاره شده در بالا، به

همراه دو توزیع دو پارامتری ساده دیگر (وایبول و نرخ شکست خطی) ارائه گردید. نتایج مقایسه‌ها نشان دادند که توزیع جدید بهترین برازش را نسبت به سه توزیع اشاره شده برای مجموعه داده‌های واقعی فراهم می‌کند. نتیجه می‌گیریم که توزیع  $EGLE$  بهترین توزیع در میان همه توزیع‌های به کار گرفته شده برای برازش به مجموعه داده‌های ارائه شده می‌باشد.

## ۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیعی چهار پارامتری به نام توزیع نمایی تعمیم‌یافته نمایی شده، به صورت بسط‌هایی از توزیع نمایی خطی تعمیم‌یافته [۶]، توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته [۱۲] و توزیع وایبول نمایی شده [۷]، ارائه گردید. بخشی از ویژگی‌های آماری این توزیع شامل میانگین، میانه، مد، گشتاورها، مقادیر چولگی و کشیدگی، چگالی احتمال آماره‌های ترتیبی و گشتاورهای آنها بیان شد. برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم چهار پارامتر توزیع جدید، مورد بررسی قرار گرفتند و ماتریس اطلاع فیشر ارائه شد. سه مجموعه از داده‌های واقعی با

### پیوست A

عناصر ماتریس اطلاع به دست آمده برای مجموعه‌ای از داده‌های کامل به صورت زیر است:

$$I(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} U_{aa} & U_{ab} & U_{ac} & U_{ad} \\ \circ & U_{bb} & U_{bc} & U_{bd} \\ \circ & \circ & U_{cc} & U_{cd} \\ \circ & \circ & \circ & U_{dd} \end{pmatrix}$$

$$U_{bc} = -\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{\varpi_i} - \frac{c}{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \varpi_i^{c-1} \ln \varpi_i$$

$$- \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \varpi_i^{c-1} + \frac{(d-1)}{\gamma}$$

$$\times \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^\gamma \varpi_i^{c-1} \varpi_i)(1 - \varpi_i)[(1 + c \ln \varpi_i) - c \varpi_i^\gamma \ln \rho_i]}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

$$\phi_i = h_{LE}(x_i; a, b) = a + bx_i$$

$$\varpi_i = H_{LE}(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)$$

$$\omega_i = \exp\{-(ax_i + \frac{b}{\gamma} x_i^\gamma)^c\}$$

$$U_{bd} = \frac{c}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma \varpi_i^{c-1} \varpi_i}{1 - \varpi_i}$$

$$U_{cc} = \frac{-n}{c^\gamma} - \sum_{i=1}^n \varpi_i^c (\ln \varpi_i)^\gamma$$

$$+ (d-1) \sum_{i=1}^n \frac{\varpi_i^c \varpi_i (\ln \varpi_i)^\gamma ((1 - \varpi_i) - \varpi_i^c)}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

$$U_{cd} = \sum_{i=1}^n \frac{\varpi_i^c \varpi_i \ln \varpi_i}{1 - \varpi_i}, \quad U_{dd} = \frac{-n}{d^\gamma}$$

$$U_{aa} = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\phi_i^\gamma} - (c-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{\varpi_i} - c(c-1) \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \varpi_i^{c-2}$$

$$+ c(d-1) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^\gamma \varpi_i^{c-2} \varpi_i)[(1 - \varpi_i)(c-1) - c \varpi_i^c]}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

$$U_{ab} = -\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\phi_i^\gamma} - \frac{(c-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{\varpi_i} - \frac{c}{\gamma} (c-1) \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \varpi_i^{c-2}$$

$$+ \frac{c}{\gamma} (d-1) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^\gamma \varpi_i^{c-2} \varpi_i)[(1 - \varpi_i)(c-1) - c \varpi_i^c]}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

### مراجع

[1] Abouammoh, A.M. Abdulghani, S.A. and Qamber, I.S. (1994). On partial orderings and testing of new better than renewal used classes. Reliab. Eng. Syst. Safety; 43, 37-41.

[2] Aarset, M.V. (1987). How to identify bathtub hazard rate. IEEE Trans. Reliab; R-36, 106-108.

[3] Akaike, H. (1974). A new look at statistical model identification. IEEE Trans. Reliab; 19, 716-723.

$$U_{ac} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\varpi_i} - c \sum_{i=1}^n x_i \varpi_i^{c-1} \ln \varpi_i - \sum_{i=1}^n x_i \varpi_i^{c-1}$$

$$+ (d-1) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i \varpi_i^{c-1} \varpi_i)[(1 - \varpi_i)(1 + c \ln \varpi_i) - c \varpi_i^\gamma \ln \varpi_i]}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

$$U_{ad} = c \sum_{i=1}^n \frac{x_i \varpi_i^{c-1} \varpi_i}{1 - \varpi_i}$$

$$U_{bb} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{\phi_i^\gamma} - \frac{(c-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{\varpi_i} + \frac{c(c-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n x_i^\gamma \varpi_i^{c-2}$$

$$+ \frac{c(d-1)}{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i^\gamma \varpi_i^{c-2} \varpi_i)[(1 - \varpi_i)(c-1) - c \varpi_i^c]}{(1 - \varpi_i)^\gamma}$$

- ear exponential distribution. *Applied Mathematical Modelling*; 37, 2838–2849.
- [11] Surles, J.G. and Padgett, W.J. (2005). Some properties of a scaled Burr type X distribution. *J. Statist. Plann. Inference*; 128, 271–280.
- [12] Sarhan, A. and Kundu, D. (2009). Generalized linear failure rate distribution. *Commun. Statist. Theory Methods*; 38 (5), 642–660.
- [13] Xie, M. Tang, Y. and Goh, T.N. (2002). A Modified Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliab. Eng. Syst. Safe*; 76, 279–285.
- [14] Zhang, T. Xie, M. Tang, L.C. and Ng, S.H. (2005). Reliability and Modeling of Systems Integrated with Firmware and hardware. *Int. J. Reliab. Quality Safety Eng*; 12 (3), 227–239.
- [4] Burden, L. and Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis*. ninth ed., Brooks/Cole, Cengage Learning.
- [5] Gupta, R. and Kundu, D. (1999). Generalized exponential distribution. *Aust. N. Z. J. Statist*; 41 (2), 173–188.
- [6] Mahmoud, M.A.W. and Alam, F.M.A. (2010). The generalized linear exponential distribution. *Statist. Probabil. Lett*; 80, 1005–1014.
- [7] Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure rate data. *IEEE Trans. Reliab*; 42, 299–302.
- [8] Lai, C.D. Xie, M. and Murthy, D.N.P. (2001). Bathtub shaped failure rate distributions, in: N. Balakrishnan, C.R. Rao (Eds.). *Handbook in Reliability*; vol. 20, pp. 69–104.
- [9] Pham, H. and Lai, C.D. (2007). On recent generalizations of the Weibull distribution. *IEEE Trans. Reliab*; 56, 454–458.
- [10] Sarhan, M. EL-Baset, A. Ahmad, A. and Ibtesam A. (2013). Alasbahi Exponentiated generalized lin-