مروری بر سیر تاریخی فرایندهای تصادفی

رضا فرهادیان
دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان

چکیده

در این نوشتار مروری خواهیم داشت بر سیر تاریخی فرایندهای تصادفی و دانشمندانی که دستاوردهای چشمگیری در این زمینه داشته‌اند.

واژه‌های کلیدی: انتگرال تصادفی، زنجیرهای مارکف، حرکت براونی، فرایندهای تصادفی، مارتینگل.

۱ نقطهٔ آغاز: مشاهدهٔ حرکت نامنظم ذرات

در سال ۱۸۲۷، یک گیاه‌شناس انگلیسی به نام رابرت براون[۱] (۱۷۷۳ -۱۸۵۸) در حالی‌که مشغول کار بر روی دانه‌های گردهٔ گل‌ها و بعضی از گیاهان به وسیلهٔ میکروسکوپ بود، متوجه شد مادامی‌که دانه‌های گردهٔ گل‌ها در قطرهٔ آب معلق هستند، ذرات ریزی[۲] به سرعت از آن‌ها خارج می‌شوند که دارای حرکتی نامنظم و دائمی هستند. براون سعی کرد تا علت این حرکت را مورد بررسی قرار دهد. در ابتدا او فکر می‌کرد که این حرکات به واسطهٔ موجوداتی زنده صورت می‌گیرند اما با آزمایشاتی که بر روی مواد معدنی انجام داد ثابت کرد که این‌گونه نیست. نهایتاً براون نتوانست یک توضیح علمی مناسب برای حرکت نامنظم این ذرات بدست آورد.

شکل ۱: رابرت براون.

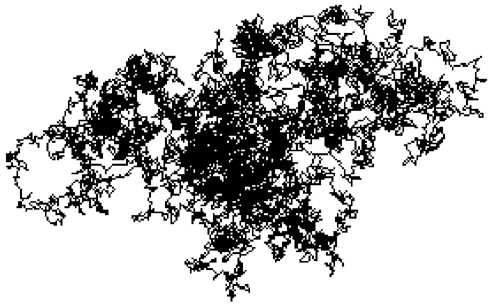
براون مقاله‌ای در رابطه با مشاهدات خود نوشت ولی اولین اقدام او برای انتشار این مقاله در یک مجلهٔ معتبر با شکست مواجه شد. سرانجام او تصمیم گرفت تا مقالهٔ خود را به‌صورت آزاد منتشر کند. حرکت نامنظمی که براون مشاهده کرد امروزه با عنوان «حرکت براونی[۳]» شناخته می‌شود.

---

[1] Robert Brown

[۲] امروزه ما این ذرات ریز را با عنوان آمیلوپلاست‌ها و اسفروئوزها می‌شناسیم.

[3] Brownian motion



شکل ۲: تصویری از حرکت براونی یک ذرّه.

حرکت براونی زاییدهٔ سردرگمی ذرّه برای انتخاب مسیر است، زیرا، به محض اینکه ذرّه مسیری را برای حرکت انتخاب می‌کند، بلافاصله مسیر آن به جهت دیگری منحرف شده و همین امر موجب آن می‌شود که نهایتاً ذرّه مسیری نامنظم از خود باقی بگذارد. معمولاً شکل مسیر پیموده شده توسط یک ذرّه تحت تأثیر حرکت براونی شبیه به شکل ۲ است، اما برای ذرات مختلف و معلق در مواد گوناگون شدت بی‌نظمی در مسیر پیموده شده متغیر است. با این حال ویژگی ثابتی که در حرکت براونی همهٔ ذرات مشهود است، پیوسته بودن مسیر حرکت و تصادفی بودن جهت حرکت در هر لحظه از زمان است. البته مشاهدات براون هیچ‌کدام از این ویژگی‌های شهودی را توضیح نمی‌داد و حتی در مقالهٔ او هیچ تصویر و ترسیمی که بتواند گویای یک کشف غیرمنتظره باشد ارائه نشده بود.

جالب است بدانید مدارک موجود حاکی از آن است که حرکت براونی ۴۲ سال قبل از براون مشاهده شده است، اما به‌طور خاص نه برای گردهٔ گل‌ها بلکه برای ذرات ریز ذغال که در اَلکل شناور هستند. در سال ۱۷۸۵، یک شیمی‌دان هلندی به نام ژان اینگن هاوس[۴] (۱۷۳۰-۱۷۹۹) مقاله‌ای را به زبان فرانسوی منتشر ساخت که در آن به بررسی آزمایش‌هایی جدید برای مشاهدهٔ اجرام فیزیکی به‌وسیلهٔ ذرّه‌بین پرداخته بود [۵]. در بخشی از مقالهٔ ژان اینگن هاوس جملهٔ زیر آمده است:

«مشاهدهٔ حرکت ذرات ریز کربن (ذغال) در اَلکل به‌عنوان یک حرکت دائمی»

بسیاری معتقدند که این اولین گزارش از حرکت براونی است، اما خیلی‌ها نیز بر این باورند که وجود ذرات غوطه‌ور در اَلکل موجب افزایش سرعت تبخیر اَلکل می‌شود و حرکت ذرات کربن در اَلکل به طور کامل نشان‌دهندهٔ حرکت براونی نیست.

شکل ۳: ژان اینگن هاوس.

اگر چه در قرن نوزدهم حرکت براونی توسط برخی از دانشمندان مورد مطالعه قرار گرفت اما تا اوایل قرن بیستم هیچ توضیح فیزیکی مناسبی برای آن ارائه نشد. توجه داشته باشید که دانشمندان قرن نوزدهم از جمله خود براون تقریباً هیچ اطلاعات علمی و مستندی در مورد اتم‌ها و مولکول‌ها نداشتند و نظریات معتبر در مورد ساختارهای اتمی در اواخر قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم رواج پیدا کردند.

[4]Jan Ingen-Housz

در سال ۱۹۰۲، یک دانشمند استرالیایی به نام ویلیام ساترلند[5] (۱۸۵۹-۱۹۱۱) مطالعاتی فیزیکی -شیمیایی بر روی ذرات معلق در بعضی از مواد شیمیایی انجام داد [۱۳] و نهایتاً با توسعهٔ این مطالعات او در سال ۱۹۰۵ مقالهٔ جدیدی را منتشر ساخت [۱۴] و در آن نشان داده بود که کمترین مقدار ضریب انتشار یک ذرّهٔ کروی شکل با شعاع α در یک مایع با گرانروی η در دمای مطلق T برابر است با

$$D = \frac{RT}{6\pi\eta C},$$

که در آن R نشان‌دهندهٔ ثابت عمومی گازها[6] و C نشان‌دهندهٔ ثابت آووگادرو[7] است. اگرچه فرمول ساترلند خیلی از خصوصیات حرکت براونی را مستقیماً توضیح نمی‌دهد، اما به روشنی توضیح می‌دهد که حرکت ذرات گوناگون در مواد مختلف دارای شدت متفاوتی هستند. متاسفانه آنچه را که ساترلند به آن پی برده بود، به‌خوبی بازتاب داده نشد و همین امر موجب آن شد که دستاورد ساترلند مجدداً توسط دانشمندان دیگری بازتولید شود.

شکل ۴: ویلیام ساترلند.

چند ماه پس از انتشار مقالهٔ ۱۹۰۵ ساترلند، فیزیکدان معروف آلمانی آلبرت انیشتین[8] (۱۸۷۹-۱۹۵۵) پایان‌نامهٔ دکتری خود را در مورد فشار اسمزی[9] منتشر کرد. فرمولی که انیشتین برای محاسبهٔ ضریب انتشار یک ذرّه (به نام ذرّهٔ استوکس[10]) در یک مایع خنثی بدست آورد همان کمترین مقدار بدست آمده توسط ساترلند بود. البته روش‌های ساترلند و انیشتین بیشتر از جنبه تئوری و شهودی قابل درک بودند و محوریت آن‌ها کمیت‌های فیزیکی و شیمیایی نظیر سرعت ذرات و میزان مقاوت مایعات بود. سپس در همان سال ۱۹۰۵، انیشتین با تأثیر پذیرفتن از پایان‌نامهٔ خود، در قالب یک مقاله [۴] نظریه‌ای را ارائه کرد که در واقع پاسخی برای مسئلهٔ حرکت براونی به‌شمار می‌رفت. از این نظریه چنین استدلال می‌شد که حرکت براونی بر اثر برخورد ذرات با مولکول‌های مایعی که در آن معلق هستند صورت می‌گیرد.

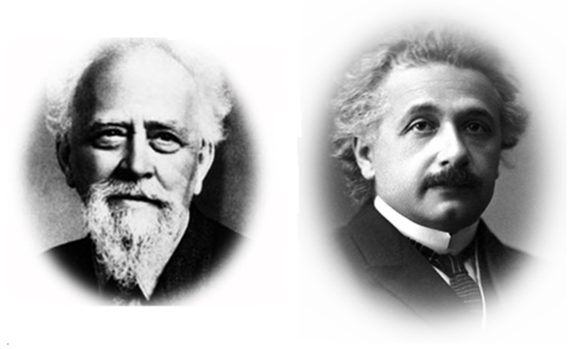
استدلال انیشتین بسیار ساده بود، زیرا اگر نظریهٔ او صحت می‌داشت، پس باید با افزایش جنبش مولکول‌های مایع سرعت ذرات معلق در مایع نیز افزایش پیدا می‌کرد و می‌دانیم که برای بالا بردن جنب و جوش مولکول‌ها، کافیست که دمای مایع را افزایش دهیم. انیشتین بیان کرد که این موضوع باید به راحتی در زیر میکروسکوپ مشاهده شود و همین بیان او یک فیزیکدان معروف فرانسوی به نام ژان باتیست پرین[11] (۱۸۷۰-۱۹۴۲) را برای اندازه‌گیری‌های کمّی این پدیده تحریک کرد.

پرین تصاویری را از حرکت یک ذرّه بر اثر برخورد با مولکول‌های آب ترسیم کرد که نشان می‌داد نظریهٔ انیشتین درست است [۱۱]. لازم به ذکر است که این دستاورد پرین

[5] Villiam Sutherland
[6] Gas constant
[7] Avogadro constant

[8] Albert Einstein
[9] Osmotic pressure
[10] Stokes particle
[11] Jean Baptiste Perrin

به همراه بعضی دستاوردهای دیگر او در علم فیزیک، جایزهٔ نوبل فیزیک سال ۱۹۲۶ را برای او به ارمغان آورد.



شکل ۵: آلبرت انیشتین (سمت راست) و ژان باتیست پرین (سمت چپ).

۲ ورود ریاضیدانان به مسئلهٔ حرکت براونی

هرچند مسئلهٔ حرکت براونی به‌عنوان یک پدیدهٔ فیزیکی توسط فیزیکدانان مورد بررسی قرار گرفت و نهایتاً توسط انیشتین توجیه شد، اما توجه ریاضیدانان را نیز به خود جلب کرد. به‌طور کلی حرکت براونی یک سیستم سادهٔ فیزیکی است که در آن ذرات با حرکت تصادفی مسیرهایی احتمالی ایجاد می‌کنند. گسسته مقدار بودن اجزای سیستم و تصادفی بودن مسیرهای ایجاد شده توسط ذرات، زمینه مناسبی را برای ریاضیدانان علاقه‌مند به نظریهٔ احتمالات و همچنین آماردانان فراهم آورد. البته قبل از آن یک مسئلهٔ احتمالی دیگر که مشتمل بر حرکت تصادفی می‌شد توسط کارل پیرسون[12] (۱۸۵۷–۱۹۳۶) آماردان معروف انگلیسی مطرح شد که امروزه ما این مسئله را با عنوان «قدم زدن تصادفی» می‌شناسیم. در سال ۱۹۰۵، پیرسون توسط نوشتاری کوتاه که در مجلهٔ «نیچر[13]» منتشر شد، مسئلهٔ قدم زدن تصادفی را به‌صورت زیر مطرح کرد:

«یک مرد با شروع از نقطه ۰ روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند: او به وسیلهٔ هر چیزی که در سر راهش قرار دارد از مسیر مستقیم منحرف می‌شود و دوباره به مسیر باز می‌گردد. او این فرایند را n مرتبه تکرار می‌کند. من می‌خواهم بدانم احتمال آنکه پس از این n مرحله او در یک فاصله بین r و $r+\delta r$ باشد چقدر است.»

شکل ۶: کارل پیرسون.

البته در همان جلد از مجلهٔ نیچر، فیزیکدان انگلیسی و کاشف عنصر آرگون، جان ویلیام استرات[14] معروف به لُرد ریلی[15] (۱۸۴۲–۱۹۱۹)، به مسئلهٔ پیرسون پاسخ داد. لازم به ذکر است که لُرد ریلی سومین بارون ریلی و از معدود اشراف زادگان اروپایی بود که جوایز علمی زیادی را کسب نمود که از آن جمله می توان به مدال پادشاهی در سال ۱۸۸۲، مدال کاپلی در سال ۱۸۹۹ و جایزهٔ نوبل فیزیک در سال ۱۹۰۴ اشاره کرد.

[12] Karl Pearson

[13] Nature

[14] John William Strutt

[15] Lord Rayleigh

شکل ۷: لُرد ریلی.

اگر چه مسئلهٔ قدم زدن تصادفی ابتدا به‌عنوان یک مسئلهٔ احتمالی مطرح شد اما بعدها به‌عنوان یک زنجیر تصادفی مورد مطالعه قرار گرفت. اما در مورد حرکت براونی سرانجام در سال ۱۹۲۳، یک ریاضیدان آمریکایی به نام نوبرت وینر[16] برای اولین بار مدل ریاضی حرکت ذرات معلق در مایعات را که بعدها به فرایند حرکت براونی و یا فرایند وینر شهرت یافت را به‌صورت فرایندی تصادفی مطرح کرد. از این‌رو فرایند حرکت براونی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱ (فرایند حرکت براونی). *فرایند $\{X_t : t \geq 0\}$ را یک فرایند حرکت براونی با پارامتر $\sigma > 0$ گویند، هرگاه*

الف) $X_0 \equiv 0$.

ب) به‌ازای هر $0 \leq s < t$، متغیرهای تصادفی $X_t - X_s$ که به آن‌ها نِمو در فاصلهٔ (s,t) گفته می‌شود، مستقل باشند و توزیع آن‌ها فقط به تفاضل $t-s$ بستگی داشته باشد.

ج) به‌ازای هر $0 \leq s < t$، متغیر تصادفی $X_t - X_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2(t-s)$ باشد.

[16]Nobert Wiener

این بدان‌معناست که

$$P(X_t - X_s < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(t-s)}}\, dt.$$

شکل ۸: نوبرت وینر.

البته فرایندهای دیگری نیز مشابه فرایند حرکت براونی وجود دارند که از جمله معروف‌ترین آن‌ها می‌توان به فرایند پواسون اشاره کرد. تنها تفاوت فرایند پواسون با فرایند حرکت براونی این است که در فرایند پواسون پیشامدهای رخ داده شده در فاصله $[s,t]$ دارای توزیع پواسون هستند. عموماً، به آن دسته از فرایندهای تصادفی که مشابه فرایند براونی هستند، ***فرایندهای تصادفی شمارشی*** می‌گویند.

۳ ظهور زنجیرهای مارکف

با گذشت زمان مبحث فرایندهای تصادفی وارد عرصهٔ جدیدی از ویژگی‌ها و کاربردها شد که مهم‌ترین ویژگی در این میان ***ویژگی مارکف***[17] است و همین ویژگی منجر به پیدایش یکی از مهم‌ترین مباحث مربوط به فرایندهای تصادفی یعنی ***زنجیرهای مارکف***[18] شد. فرایند تصادفی

[17]Markov property
[18]Markov chains

$\{X_t : t \geq 0\}$ با فضای حالت ℓ که مجموعه مقادیر ممکن آن متناهی یا شماراست را در نظر بگیرید. اگر $X_t = i$ ، آنگاه فرایند در زمان (مرحله) t در حالت i است و گوییم فرایند تغییر حالت داده است، هرگاه با احتمال ثابتی مانند p_{ij} از حالت i به حالت j برود. گوییم این فرایند یک زنجیر مارکف است اگر p_{ij} به‌ازای تمامی مقادیر $\{i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i, j\}$ از فضای حالت ℓ دارای ویژگی زیر موسوم به ویژگی مارکف باشد:

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_0 = i_0\}$$
$$= P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}. \qquad (1)$$

این بدان‌معناست که توزیع حالت فرایند در مرحلهٔ $t+1$ فقط به مرحلهٔ t بستگی دارد و سایر حالت‌های قبل بی‌تأثیر هستند. ویژگی مارکف نوعی احتمال شرطی است که امکان وقوع یک رخ‌داد در آینده را به وضعیت کنونی محدود می‌کند و تمام وقایع پیش از آن را از دایره اطلاعات مورد نیاز کنار می‌گذارد. مفهوم ***زنجیر***[19] برای اولین بار در سال ۱۹۰۶ توسط ریاضیدان روسی آندره آندریویچ مارکف[20] (۱۸۵۶-۱۹۲۲) در [۸] به‌کار برده شد.

شکل ۹: آندره آندریویچ مارکف.

مارکف یک زنجیر ساده متشکل از دو حالت ۰ و ۱ را به‌صورت یک دنبالهٔ نامتناهی از متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_t, X_{t+1}, ...$ در نظر گرفت به‌طوری که به‌ازای هر t، اگر متغیر X_t معلوم باشد، آنگاه متغیر X_{t+1} مستقل است از متغیرهای $X_1, X_2, ..., X_{t-1}$. او زنجیر را **همگن**[21] نامید، هرگاه توزیع شرطی X_{t+1} به شرط X_t مستقل از اندیس t باشد. باید در نظر داشت که اگر یک زنجیر همگن نباشد آنگاه ***ناهمگن***[22] است. بیشتر کارهای مارکف به زنجیرهای همگن ساده اختصاص داده شده است. مارکف نشان داد که اگر p_{ij} نشان دهندهٔ احتمال تغییر وضعیت زنجیر در یک مرحله از $X_t = i$ به $X_{t+1} = j$ و $p_i^{(t)}$ نشان دهندهٔ احتمال در وضعیت $X_t = i$ باشد، آنگاه

$$p_j^{(t+1)} = \sum_i p_i^{(t)} p_{ij}.$$

او همچنین تساوی زیر را برای امید ریاضی زنجیر نشان داد:

$$E(X_{t+k}) = \sum_i p_i^{(t)} A_i^{(k)}, \qquad (2)$$

که در آن $A_i^{(k)} = \sum_j p_{ij} A_j^{(k-1)}$.

واضح است که احتمالات انتقال همگی نامنفی هستند و $\sum_j p_{ij} = 1$. مارکف از ماتریس به‌عنوان یک ابزار کارآمد برای بررسی زنجیرهای تصادفی استفاده کرد. فرض کنید برای یک زنجیر با فضای حالت متناهی $\ell = \{0, 1, 2, ..., n\}$، یک ماتریس مربع را به گونه‌ای تشکیل دهیم که درایهٔ (i,j)ام ($1 \leq i, j \leq n$) در آن برابر باشد با احتمال انتقال p_{ij}. در این صورت یک ماتریس

[19] Chain
[20] Andrei Andreyevich Markov
[21] homogeneous
[22] Complex

مربع از مرتبهٔ $(n+۱)\times(n+۱)$ به‌صورت

$$P_n = \begin{bmatrix} p_{۰۰} & p_{۰۱} & p_{۰۲} & \cdots & p_{۰n} \\ p_{۱۰} & p_{۱۱} & p_{۱۲} & \cdots & p_{۱n} \\ p_{۲۰} & p_{۲۱} & p_{۲۲} & \cdots & p_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n۰} & p_{n۱} & p_{n۲} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}_{(n+۱)\times(n+۱)} \quad (۳)$$

حاصل می‌شود که مجموع درایه‌های هر سطر آن برابر با ۱ است. به این ماتریس، ***ماتریس انتقال***[۲۳] گفته می‌شود. مارکف قانون ضعیف اعداد بزرگ را برای زنجیرهای همگن با ماتریس انتقال مثبت[۲۴] مورد بررسی قرار داد. با فرض اینکه ℓ نشان دهندهٔ فضای حالت است، او با استفاده از رابطهٔ (۲) ثابت کرد که

$$\overbrace{\min_{z\in\ell} A_z^{(k)}}^{m^{(k)}} \leq E(X_{t+k}) \leq \overbrace{\max_{z\in\ell} A_z^{(k)}}^{M^{(k)}}. \quad (۴)$$

مارکف ثابت کرد که اگر مقدار k افزایش یابد، آن‌گاه اختلاف $\Delta^{(k)} = M^{(k)} - m^{(k)}$ به سمت ۰ میل می‌کند. بر پایهٔ این نتایج مارکف اثبات ظریفانهٔ خود را از قضیه‌ای بسیار مهم که امروزه به ***قضیهٔ ارگودیک***[۲۵] شهرت دارد، ارائه کرد. مارکف در همان مقالهٔ ۱۹۰۶ [۸]، قضیهٔ ارگودیک را برای یک زنجیر با ماتریس انتقال مثبت اثبات کرد. برای ملاحظهٔ اثبات مارکف از قضیهٔ ارگودیک به [۱، قضیهٔ ۱.۴] رجوع کنید. البته مارکف در مقالهٔ ۱۹۰۸ خود [۹]، فرض مثبت بودن ماتریس انتقال را با فرض دیگری جایگزین کرد و قضیهٔ ارگودیک را به شکلی عمومی‌تر ارائه کرد. او این‌گونه بیان کرد که ممکن است همهٔ p_{ij}ها مثبت نباشند (به عبارت دیگر ماتریس انتقال یک زنجیر مثبت نباشد) اما یک مرحلهٔ متناهی مانند m موجود باشد به‌طوری که همهٔ احتمالات انتقال m مرحله‌ای مثبت باشند؛ یعنی اگر $p_{ij}^{(m)}$ نشان دهندهٔ احتمال تغییر وضعیت در m مرحله از i به j باشد، آن‌گاه

$$p_{ij}^{(m)} > ۰, \quad \forall i,j \in \ell.$$

او این ویژگی را ***تحویل‌ناپذیری***[۲۶] نامید. امروزه می‌دانیم که ویژگی تحویل‌ناپذیری از شرایط لازم برای ارگودیکی زنجیرهای مارکف است. دستاوردهای مارکف در مورد زنجیر ساده‌ای که خودش معرفی کرده بود بسیار کامل و چشم‌گیر بودند، اما اصطلاح «زنجیر مارکف» حداقل تا چهار سال پس از مرگش برای دستاورد او به‌کار نرفت. نخستین بار در سال ۱۹۲۶ در مقاله‌ای منسوب به ریاضیدان روسی سرگئی ناتانوویچ برنشتاین[۲۷] (۱۸۸۰-۱۹۶۸) اصطلاح زنجیر مارکف برای زنجیر ساده‌ای که مارکف معرفی کرده بود به‌کار برده شد [۲].

شکل ۱۰: سرگئی ناتانوویچ برنشتاین.

[۲۳] Transition matrix

[۲۴] یک ماتریس انتقال که همهٔ درایه‌های آن مثبت باشند را ماتریس انتقال مثبت گویند.

[۲۵] Ergodic theorem

[۲۶] irreducibility

[۲۷] Sergei Natanovich Bernstein

مسئلهٔ پیش‌بینی در زنجیرهای مارکف از اهمیت زیادی برخوردار است. ریاضیدان روسی آندره نیکولاویچ کولموگروف[۲۸] (۱۹۰۳–۱۹۸۷) و ریاضیدان انگلیسی سیدنی چَپمن[۲۹] (۱۸۸۸–۱۹۷۰)، تقریباً همزمان و مستقل از یکدیگر نشان دادند که با در دست داشتن احتمالات انتقال مراحل پایین‌تر از مرحلهٔ m می‌توان احتمال انتقال در مرحلهٔ m را بدست آورد.

معادلات آن‌ها نشان می‌دهند که توان m از ماتریس انتقال یک زنجیر مارکف گسسته زمان با فضای حالت متناهی احتمالات انتقال m مرحله‌ای را شامل می‌شود. دستاورد مهم آن‌ها که امروزه به برابری چپمن–کولموگروف[۳۰] شهرت دارد، در قضیهٔ زیر ارائه می‌شود:

قضیه ۱. ***(برابری چَپمن-کولموگروف).*** *زنجیر مارکف $\{X_t : t \geq 0\}$ با فضای حالت ℓ را در نظر بگیرید. فرض کنید $p_{ij}^{(m)}$ احتمال انتقال m مرحله‌ای از i به j باشد. آن‌گاه برای همهٔ مقادیر r که $0 < r < m$، داریم:*

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{z\in\ell} p_{iz}^{(r)} p_{zj}^{(m-r)}. \qquad (۵)$$

اثبات.

$$p_{ij}^{(m)} = P\{X_m = j | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{z\in\ell} P\{X_m = j, X_r = z | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{z\in\ell} P\{X_m = j | X_r = z, X_0 = i\} P\{X_r = z | X_0 = i\}$$

$$= \sum_{z\in\ell} p_{zj}^{(m-r)} p_{iz}^{(r)}.$$

با کمی تفکر در رابطهٔ (۵) می‌توان نتیجه گرفت که این رابطه همان رابطهٔ ضرب ماتریسی است. در واقع طبق تعریف ضرب ماتریسی می‌دانیم که اگر $A_n = [a_{ij}]_{n\times n}$ و $B_n = [b_{ij}]_{n\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند و

$$C_n = A_n \times B_n,$$

آن‌گاه

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

حال فرض کنید P_n ماتریس انتقال یک زنجیر مارکف با n حالت باشد. می‌خواهیم درایهٔ (i,j)ام ماتریس P_n^m را بدست آوریم با فرض اینکه

$$P_n^m = P_n^r \times P_n^{m-r}, \quad 0 < r < m,$$

در این صورت اگر p_{ij}^m درایهٔ (i,j)ام ماتریس P_n^m باشد، داریم:

$$p_{ij}^m = \sum_{z=1}^{n} p_{iz}^r p_{zj}^{m-r}.$$

که برابر با رابطهٔ (۵) است. پس برابری چپمن–کولموگروف در واقع همان رابطهٔ ضرب ماتریسی است. از این‌رو اگر P_n نشان‌دهندهٔ ماتریس انتقال یک‌مرحله‌ای و $P_n^{(m)}$ نشان‌دهندهٔ ماتریس انتقال mمرحله‌ای برای یک زنجیر مارکف nحالتی باشند، آن‌گاه برابری چَپمن–کولموگروف معادل است با

$$P_n^{(m)} = \underbrace{P_n \times P_n \times \ldots \times P_n}_{m \text{ مرتبه}}. \qquad (۶)$$

برابری چَپمن–کولموگروف یکی از روابط بسیار کاربردی در بررسی رفتار مرحله به مرحلهٔ زنجیرهای مارکف است. در بسیاری از زنجیرهای مارکف حتی

[28] Andrey Nikolaevich Kolmogorov
[29] Sydney Chapman
[30] Chapman - Kolmogorov equation

می‌توان رفتار حدی زنجیر را بررسی کرد. البته بررسی رفتار حدی یک زنجیر نیازمند شرایطی است که در همهٔ زنجیرها یافت نمی‌شود. مثلاً برای اینکه حاصل‌ضرب (۶) به یک ماتریس شامل مقادیر حدی میل کند، بایستی ماتریس انتقال P_n نادوره‌ای باشد. البته ویژگی‌های دیگری نیز وجود دارند، اما به‌طور کلی قضیهٔ ارگودیک که قبلاً از آن نام برده شد این شرایط را توضیح می‌دهد.

شکل ۱۱: آندره نیکولاویچ کولموگروف (سمت راست) و سیدنی چَپمن (سمت چپ).

تا یک دهه پس از مرگ مارکف، زنجیر تصادفی او مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفت و پیشرفت‌ها در این زمینه رشد چشمگیری داشتند. در این دوره نظریهٔ احتمالات نیز به سرعت رشد می‌کرد و نگرش کلاسیک احتمال به تدریج به حاشیه رانده می‌شد. در همین دوران بود که عبور از مرز بین دورهٔ کلاسیک و عصر جدید نظریهٔ احتمالات صورت گرفت. در سال ۱۹۳۳، کولموگرف تعریف جدیدی از احتمال را بر مبنای سه اصل بنیادین که امروزه به اصول موضوعهٔ کولموگروف شهرت دارند ارائه کرد. مطابق با این تعریف جدید تابع $P(E)$ یک تابع احتمال برای پیشامد E از فضای نمونه‌ای S است، هرگاه در سه اصل موضوعهٔ زیر صدق کند:

اصل موضوع (۱): $۰ \leq P(E) \leq ۱$.

اصل موضوع (۲): $P(S) = ۱$.

اصل موضوع (۳): *به‌ازای دنباله‌ای از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار[۳۱] $E_۱, E_۲, \ldots$، داشته باشیم:*

$$P\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(E_i).$$

تعریف جدید کولموگروف رشد نظریهٔ احتمالات را سرعت بخشید. متعاقباً، انتظار می‌رفت که فرایندهای تصادفی و به‌خصوص زنجیرهای مارکف نیز به سرعت توسعه یابند. در همین دوران ریاضیدان معروف روسی الکساندر یوکوویلیچ خین‌چین[۳۲] (۱۸۹۴-۱۹۵۹) از جمله افرادی بود که در معرفی زنجیری که مارکف ابداع کرده بود نقش به‌سزایی داشت. در سال ۱۹۳۴، خین‌چین عنوان «فرایندهای مارکفی» را برای زنجیرهای مارکف پیشنهاد داد.

شکل ۱۲: الکساندر یوکوویلیچ خین‌چین.

[۳۱] دو پیشامد E_i و E_j که $i \neq j$ ناسازگارند، هرگاه $E_i \bigcap E_j = \emptyset$.

[32] Aleksandr Yakovlevich Khinchin

۴ فرایندهای تصادفی در نیمهٔ دوم قرن بیستم

در دههٔ ۳۰ مباحث جدیدی در فرایندهای تصادفی شروع به شکل‌گیری کردند. اصطلاح «مارتینگل[33]» که تعریف جدیدی از یک ویژگی قدیمی برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی بود در سال ۱۹۳۹ توسط یک ریاضیدان فرانسوی به‌نام جین ویل[34] (۱۹۱۰-۱۹۸۸) در [۱۲] معرفی شد.

تعریف ۲. *فرایند تصادفی $\{Z_t : t \geq 0\}$ را یک فرایند مارتینگل گویند، هرگاه به‌ازای هر t داشته باشیم:*

$$E[|Z_t|] < \infty, \tag{7}$$

و

$$E[Z_{t+1}|Z_1, Z_2, ..., Z_t] = Z_t. \tag{8}$$

یک فرایند مارتینگل در واقع ابزاری مفید برای مدل‌بندی احتمالی بسیاری از پدیده‌های تصادفی موجود در دنیای واقعی است. مثلاً، فرض کنید که شخصی مرتباً در یک قرعه‌کشی بانکی شرکت می‌کند به‌طوری که هربار ارزش پولی جایزه‌ای را که برنده می‌شود به سرمایهٔ اولیه‌اش می‌افزاید و در قرعه‌کشی بعدی بانک شرکت می‌دهد تا امتیاز و درنتیجه شانس بیشتری برای برنده شدن داشته باشد. از این‌رو اگر Z_t نشان‌دهندهٔ سرمایه‌ای باشد که فرد پس از t مرحله شرکت در قرعه‌کشی بدست آورده است، آن‌گاه رابطهٔ (۸) بیان می‌کند که امید سرمایهٔ فرد پس از قرعه‌کشی $(t+1)$ام، برابر است با سرمایه‌ای که تا قرعه‌کشی tام از طریق جوایز بدست آورده است، بدون اینکه نیاز باشد بدانیم در قرعه‌کشی‌های قبلی چه جوایزی را برنده شده است.

شکل ۱۳: جین ویل.

ریاضیدان برجستهٔ آمریکایی جوزف لئو دوب[35] (۱۹۱۰-۲۰۰۴) از جمله افرادی بود که در بین سال‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ روی نظریهٔ مارتینگل‌ها کار کرد. دوب قضیه‌ای را برای ساختن فرایندهای مارتینگل ثابت کرد و امروزه به فرایند مارتینگلی که توسط قضیهٔ دوب تولید شود، فرایند مارتینگل دوب گفته می‌شود. قضیهٔ دوب به‌صورت زیر است:

قضیه ۲. *[۱۰، صفحهٔ ۷۵] فرض کنید $Y_0, Y_1, ...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دلخواه باشد. اگر X یک متغیر تصادفی باشد، به‌طوری که $E[|X|] < \infty$، آن‌گاه $X_t = E[X|Y_0, Y_1, ..., Y_t]$ یک فرایند مارتینگل است.*

برهان. باید نشان دهیم که شرایط تعریف ۱ برقرار هستند. به‌عبارتی باید روابط (۷) و (۸) را برای قضیهٔ

[33]Martingale
[34]Jean Ville
[35]Joseph L. Doob

فوق بررسی کنیم. ابتدا رابطهٔ (۷) را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} E[|X_t|] &= E\{|E[X|Y_0, Y_1, ..., Y_t]|\} \\ &\leq E\{E[X|Y_0, Y_1, ..., Y_t]\} \\ &= E[|X|] < \infty. \end{aligned}$$

حال رابطهٔ (۸) را بررسی می‌کنیم:

$$E[X_{t+1}|Y_0, Y_1, ..., Y_t]$$

$$= E\{E[X_{t+1}|Y_0, Y_1, ..., Y_{t-1}, Y_t]|Y_0, Y_1, ..., Y_t\}$$

$$= E[X|Y_0, Y_1, ..., Y_t] = X_t.$$

بنابراین X_t یک فرایند مارتینگل است.

یکی دیگر از دستاوردهای مهم دوب ***قضیهٔ همگرایی مارتینگل***[36] است. صرف‌نظر از اثبات پیچیدهٔ این قضیه، نتیجهٔ آن بسیار جالب می‌باشد. قضیهٔ همگرایی مارتینگل بیان می‌کند که اگر برای مارتینگل $\{Z_t : t \geq 1\}$ داشته باشیم

$$E[|Z_t|] \leq M,$$

که در آن M عددی متناهی است، آنگاه با احتمال ۱، حد $\lim_{n\longrightarrow\infty} Z_t$ موجود و متناهی است.

دوب آنالیزدان ماهری بود و طبیعتاً دستاوردهای او در زمینهٔ مارتینگل‌ها شکلی آنالیزی به خود گرفتند. از طرفی او در جایگاه یک آنالیزدان، تحقیقات در زمینهٔ نظریهٔ احتمالات و فرایندهای تصادفی را نیز به‌طور جدی دنبال می‌کرد و همین امر موجب آن شد تا قضایای او در آنالیز تصادفی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار باشند. امروزه دوب به‌عنوان بنیان‌گذار نظریهٔ مارتینگل‌ها شناخته می‌شود.

[36] Doob's martingale convergence theorem

شکل ۱۴: جوزف لئو دوب.

در دههٔ ۴۰، ***انتگرال‌های تصادفی***[37] توسط ریاضیدان ژاپنی کیوشی ایتو[38] (۱۹۱۵-۲۰۰۸)، معرفی شدند. ایتو اولین مقالهٔ خود در زمینهٔ انتگرال‌های تصادفی را در سال ۱۹۴۴ منتشر ساخت [۶]. به‌طور کلی با فرض اینکه $\{X_t : t \geq 0\}$ یک فرایند حرکت براونی باشد، آنگاه به انتگرال

$$\int_0^t H_t dX_t,$$

یک انتگرال تصادفی گفته می‌شود که در آن H_t برگرفته از یک کلاس خاص از فرایندهای تصادفی X است (برای اطلاعات بیشتر درمورد ویژگی‌های H_t به [۶] رجوع کنید). لازم به ذکر است که انتگرال‌های تصادفی بر پایهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی شکل گرفتند. به‌عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم مدل تغییرات قیمت یک کالا را در طول زمان بدست آوریم. اگر Z_t قیمت کالا در زمان t باشد، ممکن است که تغییرات Z_t از فرایند براونی پیروی نکند، اما نرخ تغییرات قیمت کالا از فرایند تصادفی براونی $\{X_t : t \geq 0\}$ پیروی کند. یعنی

[37] Stochastic integrals

[38] Kiyosi Itô

$$\frac{d}{dt}Z_t = X_t.$$

از این‌رو

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t X_t dt,$$

و این بدان‌معناست که فرایند $\{Z_t : t \geq 0\}$ یک انتگرال تصادفی است.

از دیگر روابط بسیار مهم در ارتباط با انتگرال‌های تصادفی رابطهٔ ***ایزومتری ایتو***[39] است که به‌صورت امید ریاضی زیر تعریف می‌شود:

$$E\left[\left(\int_0^\infty H_t dX_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^\infty H_t^2 dt\right].$$

ایتو دستاوردهای بسیاری در آنالیز تصادفی به ارمغان آورد که فرمول ایتو و معادلات دیفرانسیل ایتو از جملهٔ این دستاوردها می‌باشند. امروزه ایتو به‌عنوان پدر انتگرال تصادفی و بنیانگذار آنالیز تصادفی شناخته می‌شود.

شکل ۱۵: کیوشی ایتو.

نهایتاً، در اواسط قرن بیستم کتاب‌های جامعی در باب فرایندهای تصادفی منتشر شدند، که به‌عنوان منابعی مهم در این زمینه مورد استفاده قرار گرفتند. در سال ۱۹۴۸، ریاضیدان‌های فرانسوی پل لِوی[40] (۱۸۸۶-۱۹۷۱) و میشل لوئوس[41] (۱۹۰۷-۱۹۷۹) یک کتاب بسیار مهم با عنوان «فرایندهای تصادفی و حرکت براونی» منتشر کردند که تقریباً دربرگیرندهٔ تمام اطلاعاتی بود که تا آن زمان در زمینهٔ حرکت براونی و فرایندهای تصادفی وجود داشت [۷].

شکل ۱۶: پل لِوی (سمت راست) و میشل لوئوس (سمت چپ).

سپس دوب در سال ۱۹۵۳ کتاب خود با عنوان «فرایندهای تصادفی» را منتشر ساخت [۳]. حال دیگر فرایندهای تصادفی به‌عنوان نظریه‌ای مهم با کاربردهای وسیع در بسیاری از علوم نظیر آمار، فیزیک، اقتصاد و ... معرفی شده بود و روز به روز گسترش پیدا می‌کرد. گستردگی مفاهیم و موضوعات مربوط به فرایندهای تصادفی و حجم وسیع مقالات ارائه شده برای آن باعث شد تا نشریات متعدی نیز در این خصوص تأسیس شود که از آن جمله می‌توان به نشریات Stochastics، Stochastic Analysis and Applications و Stochastic Processes and their Applications اشاره کرد.

[39] Itô isometry

[40] Paul Lévy

[41] Michel Loéve

۵ گفتار پایانی

بسیاری از نظریات زیبای علمی از مشاهدات سرچشمه گرفته‌اند. هنوز هم خیلی‌ها باور ندارند که افتادن یک سیب از درخت بتواند ذهن کسی را آنقدر مشغول کند که منجر به کشف قانون جاذبه شود. اما واقعیت علم همین است و نمی‌توان آن را انکار کرد. فرایندهای تصادفی نیز از این قاعده مستثنی نبوده و در واقع این نوشتار به‌طور خلاصه گویای آن بود که نظریهٔ فرایندهای تصادفی دستاورد گیاه‌شناسی بود که مشاهده کرد، فیزیکدانی که توجیه کرد و ریاضیدانانی که الگو بخشیدند و آن را توسعه دادند. لازم به ذکر است که جای نام برخی از دانشمندان در این مقاله خالی بود اما شاید اشاره به نام آن‌ها خالی از لطف نباشد. ریاضیدانانی نظیر موریس رِنه فرشه[۴۲] (۱۸۷۸–۱۹۷۳)، وزوالد ایوانوویچ رومانفسکی[۴۳] (۱۸۷۹–۱۹۵۴)، ویلیام فِلر[۴۴] (۱۹۰۶–۱۹۷۰)، یوجین باریسوویچ دین‌کین[۴۵] (۱۹۲۴–۲۰۱۴) از جمله این دانشمندان بودند که سهم قابل توجهی در معرفی و پیدایش فرایندهای تصادفی داشته‌اند.

تقدیر و تشکر

از سردبیر محترم نشریه دانشجویی آمار (ندا) و همچنین داور ناشناس به خاطر راهنمایی‌های مفیدشان تشکر به عمل می‌آید.

[42] Maurice René Fréchet
[43] Vsevolod Ivanovich Romanovsky
[44] William Feller
[45] Eugene Borisovich Dynkin

مراجع

[۱] Basharin, G. P., Langville, A. N. and Naumov, V. A. (2004). The life and work of A.A. Markov, Linear Algebra and its Applications. 386, 155-160.

[۲] Bernstein, S. N. (1926). Sur l'extension du théoremé limite du calcul des probabilies etc., Mathematische Annalen, 97, 1–59.

[۳] Doob, J. L. (1953). Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New York.

[۴] Einstein, A. (2005). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen [AdP 17, 549 (1905)]. Annalen der Physik, 14(S1), 182-193.

[۵] Ingen-Housz, J. (1785). Nouvelles expériences et observations sur divers objets de physique.

[۶] Itô, K. (1944). Stochastic Integral, Proceedings of the Japan Academy Tokyo, 20, 519–524.

[۷] Lávy, P. and Loeve, M. (1948). Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars.

[۸] Markov, A. A. (1906). Rasprostranenie zakona bol'shih chisel na velichiny, zavisyaschie drug ot druga, Izvestiya Fiziko-matematicheskogo obschestva pri Kazanskom universitete, 2-ya seriya, 15 (94), 135–156.

[۹] Markov, A. A. (1908). Rasprostranenie predel'nyh teorem ischisleniya veroyatnostej na summu velichin svyazannyh v cep', Zapiski Akademii Nauk po Fiziko-matematicheskomu otdeleniyu. VIII seriya 25 (3) .

[۱۰] Najim, K. and Ikonen, E. and Daoud, A. (2004). Stochastic Processes: Estimation, Optimization, and Analysis., Kogan Page Science, London.

[۱۱] Perrin, Jean. Atoms. Ox Bow Press, 1990.

[۱۲] Ville, J. (1939). Étude critique de la notion de collectif, Paris, Gauthier-Villars.

[۱۳] Sutherland, W. (1902). Ionization, Ionic Velocities, and Atomic Sizes. Phil. Mag. S. 6, 14, 161-177.

[۱۴] Sutherland, W. (1905). A Dynamical Theory of Diffusion for Non-Electrolytes and the Molecular Mass of Albumin. Phil. Mag. S. 6, 54, 781-785.