دستاوردهای مفید ریاضی اویلر در آمار

هربرت آرون دیوید
مترجم: رضا فرهادیان
دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه لرستان

نوشتهٔ حاضر ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

David, H. A. (2011). Euler's Contributions to Mathematics Useful in Statistics. The American Statistician, 65(1), 37-42.

چکیده

ریاضیدان بی‌نظیر قرن هجدهم، لئونارد اویلر، پیشرفت‌های گسترده‌ای را حاصل نمود که در علم آمار مفید واقع شدند. این پیشرفت‌ها شامل توابع بتا و گاما، جمع‌زنی سری‌های نامتناهی، حساب تغییرات، تابع فی اویلر، مربع‌های لاتین و گریکو-لاتین و توابع مولد هستند. همهٔ اینها در این مقاله گردآوری شده و توضیح داده شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: توابع بتا و گاما، حساب تغییرات، ثابت گامای اویلر، تابع فی اویلر، توابع مولد، مربع‌های لاتین و گریکو-لاتین.

۱ سرآغاز

لئونارد اویلر[1] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) به‌عنوان یکی از ریاضیدانانی که دستاوردهای قابل توجهی در ریاضیات دارند، باقی مانده است. کارهای جمع‌آوری شده او با عنوان «اُپرا اُمنیا[2]»، نهایتاً در بین سال‌های ۱۹۱۱ تا ۱۹۶۴ تحت نظارت انجمن علوم طبیعی سوئیس[3] در سه مجموعه منتشر شدند: ریاضیات (۲۹ جلد)، مکانیک و نجوم (۳۰ جلد) و فیزیک و متفرقه (۱۲ جلد). تمرکز ما بر روی سری اول (ریاضیات) است. اویلر معمولاً به تنهایی نویسنگی می‌کرد و با اینکه بیشتر کارهای او به زبان لاتین نوشته شده‌اند، اما کارهایی نیز به زبان فرانسه یا آلمانی دارد که شامل تعداد اندکی مقالهٔ مرتبط با دیگران و همچنین مرورهایی مفید که توسط بسیاری از ویراستاران مختلف که معمولاً به زبان آلمانی یا فرانسه نوشته شده‌اند، می‌شود. همچنین یک مجموعهٔ چهارم از کارهای اویلر وجود دارد که در حال گردآوری است.

[1] Leonhard Euler
[2] Opera omnia
[3] Swiss Society of Natural Sciences

در سال ۲۰۰۷، به مناسبت سیصدمین سالگرد تولد اویلر در یک انتشارات ناگهانی که عمدتاً توسط ریاضیدانان صورت گرفته بود یک سری از کارهای اویلر منتشر شد. پنج کتاب در سال ۲۰۰۷ منتشر شدند و هرکجا که مربوط به موضوع ماست به آن‌ها اشاره خواهد شد. به‌نظر می‌رسد که تنها یک مقاله توسط یک آماردان به نام بِل‌حوس[4] نوشته شده است که در مورد مبحث قرعه‌کشی‌ها می‌باشد [۲]. همچنین منبع [۱] را ببینید. به‌علاوه، یک آرشیو قابل توجه از کارهای اویلر ایجاد شده که در وب در دسترس است و شامل ۸۶۶ مورد از مقالات، کتاب‌ها و نامه‌های انتخاب شده از اویلر می‌باشد. محتویات براساس سیستمی که توسط ریاضیدان سوئدی گوستاو آنستروم[5] در بین سال‌های ۱۹۱۰ تا ۱۹۱۳ ایجاد شد، شماره‌گذاری شده‌اند. این آرشیو ارجاع اصلی و اُپرا اُمنیا را ارائه می‌دهد و عنوان آن به زبان انگلیسی برگردانده شده است، یک خلاصه از موضوعات فراهم شده و مستنداتِ چاپیِ مربوطه ذکر شده‌اند و اغلب یک ترجمهٔ کامل تهیه شده یا ارجاع داده شده است.

بعضی از اوقات اویلر موضوعات آماری (ازجمله موضوعات احتمالاتی) را مورد بررسی قرار می‌داد. البته او در این مورد خاص موفق نبود [۴۵، ۴۶، ۲۸، ۲۹]. اویلر هیچ‌گاه در فهرست آماردانان برجسته که توسط جانسون[6] و کوتز[7] در [۳۳] و نیز هاید[8] و سِنِتا[9] در [۳۰] گردآوری شدند، قرار نگرفت. همچنین به‌عنوان یک دیدگاه مثبت‌تر می‌توانید فصل شانزدهم از منبع [۴۷] را ملاحظه کنید.

[4] Bellhouse
[5] Gustav Eneström
[6] Johnson
[7] Kotz
[8] Heyde
[9] Seneta

در این مقاله ما در مورد دستاوردهای اویلر در ریاضیات، که در علم آمار مفید واقع شدند، شامل توابع بتا و گاما، جمع‌زنی سری‌های نامتناهی، حساب تغییرات، تابع فی اویلر، مربع‌های لاتین و گریکو-لاتین و توابع مولد گزارش می‌دهیم. هدف این مقاله به تصویر کشیدن مختصر این موضوعات است.

داستان زندگی شخصی اویلر نیز قابل توجه است. او از عارضهٔ بینایی رنج می‌برد و از سال ۱۷۶۶ به بعد کاملاً کور بود. اما به‌دلیل حافظهٔ فوق‌العاده‌ای که داشت، این موضوع فعالیت او را به هیچ وجه کاهش نداد. سخنرانی‌های کارل پیرسون[10] [۳۹] در بین سال‌های ۱۹۲۱ تا ۱۹۳۳ در مورد زندگی اویلر و عصری که در آن زندگی می‌کرد بسیار جالب است. در این مورد مثلاً به منبع [۴] رجوع کنید.

۲ توابع بتا و گاما

لژاندر[11] انتگرال‌های اویلریِ نوع اول و دوم را به‌ترتیب تابع بتا[12] و تابع گاما[13] نامید و حروف B و Γ را برای نشان دادن آن‌ها انتخاب کرد [۳۸]. زمانی‌که اویلر ۲۲ سال بیشتر سن نداشت، تابع Γ هنوز شناخته شده نبود و اویلر با استفاده از این تابع انتگرالی به‌ازای n قصد داشت رابطه‌ای برای محاسبه $n!$ (در نمادگذاری مدرن) بیابد، اما مقادیر تقریبی‌ای را نیز بدون استفاده از انتگرال به‌ازای n فراهم آورد [۱۳].

[10] Karl Pearson
[11] Legendre
[12] Beta function
[13] Gamma function

اویلر نشان داد که

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1-x^{\delta}}{\delta}=-\log x \qquad (1)$$

سپس او قرار داد $-\ell x=\frac{1-x^{0}}{0}$، و به‌طور خلاصه نشان داد که $n!$ برابر است با انتگرال $\int dx(-\ell x)^{n}$ در بازه ۰ تا ۱. رابطهٔ (۱) مستقیماً از قاعدهٔ هوپیتال[14] که در سال ۱۶۹۶ (احتمالاً توسط جان برنولی[15]) منتشر شد، پیروی می‌کند. با این‌حال اویلر نوشت «کاربردی از یک قاعدهٔ شناخته شده».

اما انتگرال

$$\int_{0}^{1}dx(-\ell x)^{n}=\int_{0}^{\infty}y^{n}e^{-y}dy, \qquad (2)$$

به فرمی که اویلر در آن زمان ارائه کرده، نیست و رابطهٔ (۲) در ابتدا برای نمایش تابع نمایی منتشر شد. فرم نمایی برای $\Gamma(n+1)$ سرانجام پس از مرگ اویلر ایجاد شد [۲۲].

با این‌حال، اویلر در سال ۱۷۳۸، انتگرال زیر را در بازهٔ ۰ تا ۱ مطرح کرد:

$$\int x^{e}dx(1-x)^{n}$$

و به‌ازای عدد صحیح n، بدست آورد:

$$\frac{1.2.3...n}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)}$$

که برابر است با

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(e+1)}{\Gamma(n+e+2)}.$$

اویلر همچنین نشان داد (در نمادگذاری مدرن):

$$\Gamma(\tfrac{3}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \Gamma(\tfrac{5}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}. \qquad (3)$$

در واقع اویلر ابتدا از نماد $4A$ برای π استفاده کرد و نماد π برای اولین بار در سال ۱۷۴۳ توسط او در [۱۶] پدیدار شد. برای محاسبهٔ (۳)، اویلر به این نکته اشاره کرد که می‌توان $n!$ را به شکل حاصل‌ضرب نامتناهی زیر نوشت:

$$\frac{1.2^{n}}{1+n}.\frac{2^{n-1}3^{n}}{2+n}.\frac{3^{1-n}4^{n}}{3+n}.\frac{4^{1-n}5^{n}}{4+n}...$$

که برای $n=\frac{1}{2}$ برابر است با

$$\sqrt{\frac{2.4}{3.3}.\frac{4.6}{5.5}.\frac{6.8}{7.7}.\frac{8.10}{9.9}...}$$

لیکن این رابطه همان بسط ریشهٔ دوم والیس[16] برای $\frac{\pi}{4}$ است [۵۰]. رابطهٔ زیر به جای رابطهٔ (۳) (برای خوانندگان جدید) ساده‌تر به نظر می‌رسد:

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^{2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

همچنین فصل پنجم از منبع [۴۲] را ببینید.

[14] L'Hospital's Rule
[15] Johann Bernoulli
[16] Wallis

۳ اویلر و توزیع اخیرالذکر مقدار حدی

در سال ۱۷۴۰، اویلر در [۱۵] نوشت که برای مقادیر بزرگ i داریم:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+...+\frac{۱}{i}=\ell(i+۱)+C, \quad C=۰/۵۷۷۲۲...$$

سرانجام C تبدیل به γ شد که همان ثابت اویلر است و مشخص شد که این ثابت می‌تواند میانگین توزیع مقدار حدی

$$f(x)=e^{-x-e^{-x}}, \quad -\infty<x<\infty$$

باشد.

واریانس این توزیع برابر است با $\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{i^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}$، که یک اتحاد معروف منسوب به اویلر است [۱۴]. اهمیت این موضوعات توسط فیشر[۱۷] و تیپِت[۱۸] بدون ارجاع ارائه شدند [۲۳]. با یک استدلال هوشمندانه اما طولانی، اویلر ابتدا با نوشتن p به جای نماد جدیدتر π، نشان داد که

$$۱+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۴۹}+...=\frac{p^۲}{۸}.$$

سپس او در [۱۷]، به وضوح اشاره کرد که

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۶۴}+...=\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+...).$$

بنابراین $\frac{p^۲}{۸}$ باید برابر با $\frac{۳}{۴}$ باشد و به همین ترتیب جمع بالا برابر است با $\frac{p^۲}{۶}$. به‌عنوان یک گزارش جدید از استنتاج‌های گوناگون که اویلر در مدتی طولانی برای $\sum_{i=۱}^{\infty}\frac{۱}{i^۲}$ بیان کرده است، مقاله ساندیفر[۱۹] [۴۱] را ببینید.

[17] Fisher
[18] Tippett

۴ حساب تغییرات

اویلر یک عنصر کلیدی در پیشرفت زود هنگام حساب تغییرات بود. دو جلد (سری ۱، جلد ۲۴ و ۲۵) به این موضوع اختصاص داده شده است. حساب تغییرات به‌طور مکرر در نظریهٔ آماره‌های ترتیبی مورد استفاده قرار گرفته است، اولین بار در سال ۱۹۴۷ توسط پلاکِت[۲۰] [۴۰] و معمولاً بدون اشاره به نام اویلر به‌کار برده شد. این کاربرد در کتاب دیوید[۲۱] و ناگاراجا[۲۲] [۸، صفحهٔ ۶۰-۷۰] مورد بررسی قرار گرفته است. مختصراً این استدلال را برای نتیجهٔ بنیادی

$$E(X_{(n)})\le\frac{n-۱}{(۲n-۱)^{\frac{۱}{۲}}} \qquad (۴)$$

برای کران بالای امید ریاضی بزرگترین آمارهٔ ترتیبی در یک نمونهٔ تصادفی با اندازهٔ n از جامعه‌ای با تابع توزیع تجمعی استاندارد شدهٔ $F(x)$ (بدین معنا که میانگین صفر و واریانس ۱ است)، شرح می‌دهیم. در این صورت

$$E(X_{(n)})=\int_۰^۱ nx(u)u^{n-۱}du \qquad (۵)$$

[19] Sandifer
[20] Plackett
[21] David
[22] Nagaraja

که در آن $X(u) = F^{-1}(u)$ و

$$\int_0^1 x(u)du = 0, \quad \int_0^1 [x(u)]^2 du = 1. \qquad (۶)$$

با بهره‌گیری از حساب تغییرات ما می‌توانیم «حداکثر مقدار ممکن» تابع $x(u)$ را با استفاده از مقادیر ثابت تساوی (۵) به‌وسیلهٔ حداکثر مقدار ممکن غیر شرطی برای

$$\int_0^1 (nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2}bx^2)du$$

بدست آوریم و در نتیجه محاسبهٔ a و b نیازمند رابطهٔ (۶) است. راه‌حل ثابت با توجه به اینکه انتگرال بدون تغییر باقی می‌ماند، به‌وسیلهٔ تغییرات بی‌نهایت کوچک داده می‌شود، که یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x}(nxu^{n-1} - ax - \frac{1}{2}bx^2) = 0$$

که منجر به حداکثر مقدار ممکن تابع

$$x(u) = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}(nu^{n-1} - 1)}{n-1}$$

می‌شود و به همین دلیل

$$E(X_{(n)}) = \frac{(n-1)}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

در واقع این یک ماکزیمم است که می‌تواند توسط نامساوی شوارتز[23] ایجاد شود.

به‌عنوان یک منبع عمومی برای حساب تغییرات، مثلاً منبع [۳۵] را ببینید.

[23] Schwarz's inequality

۵ تابع فی اویلر

تابع ϕ اویلر که به آن تابع توشِنت[24] نیز گفته می‌شود، نقش مهمی در نظریهٔ اعداد دارد؛ به‌عنوان نمونه کار چاندرسِخاران[25] [۵] را ببینید.

تعریف ۱. *برای تمام اعداد صحیح مثبت n،*

$$\phi(n) = \text{تعداد اعداد صحیح از ۱ تا } n \text{ که نسبت به } n \text{ اول هستند},$$

با فرض اینکه $\phi(1) = 1$.

با این‌حال نماد ϕ منسوب به گوس[26] است، چرا که او در سال ۱۸۰۱، در یکی از کارهای خود نوشته بود ϕA، که در آن A یک عدد صحیح مثبت است؛ صفحه ۲۱ از کتاب گوس [۲۷] که با نسبت دادن تابع ϕ به اویلر [۱۹] به معرفی آن پرداخته است را ببینید.

یک برنامهٔ جالب برای شناسایی تعداد راه‌های انجام یک کار، معمولاً به یابلونسکی[27] [۳۲] نسبت داده می‌شود، کسی که به «تابع شناخته شده $\phi(n)$» اشاره کرد (در صفحه ۳۴۱)، بدون اینکه اسمی از اویلر ببرد (مثلاً [۶] را ببینید). یک گردنبند با m مهره را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که تعداد sتا از آن‌ها سفید و تعداد $s' = m - s$تا از آن‌ها سیاه هستند (در واقع یابلونسکی تعداد رنگ‌های بیشتری را مجاز دانست). در این‌صورت تعداد چیدمان‌های متمایزی که با استفاده از این مهره‌ها در گرداگرد گردنبند می‌توان ایجاد کرد، برابر است با

$$N(s, s') = \frac{1}{m} \sum \phi(d) \frac{(m/d)!}{(s/d)!(s'/d)!} \qquad (۷)$$

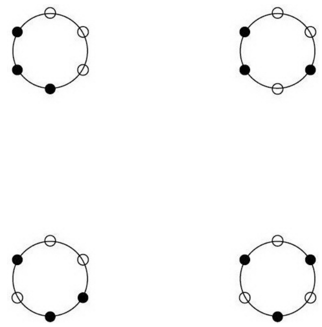
[24] totient function
[25] Chandrasekharan
[26] Gauss
[27] Jablonski

جمع فوق روی همهٔ اعداد صحیح مثبت dای است که مقسوم‌علیه هر دو عدد s و s' هستند.

مثال. *فرض کنید $s = ۳$ و $s' = ۳$. با استفاده از رابطهٔ (۷) داریم:*

$$N(۳,۳) = \frac{۱}{۶}(۱.\frac{۶!}{۳!۳!} + ۲.\frac{۲!}{۱!۱!}) = ۴.$$

چهار ترتیب (آرایش) فوق در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: ترتیب قرار گرفتن سه مهرهٔ سفید و سه مهرهٔ سیاه در یک دایره.

رابطهٔ (۷) برای شمارش چیدمان‌های دوری نیز کاربرد دارد [۷]. برای مثال زمانی‌که n عددی اول است، $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ امکان برای مقایسهٔ زوج‌های «رفتاری» از $۰, ۱, ..., n-۱$ می‌تواند به‌صورت $\frac{۱}{۲}(n-۱)$ مجموعهٔ دوری زیر نوشته شود:

$$\begin{array}{ccc}
01 & 12 & n-1,\ 0 \\
02 & 13 & n-1,\ 1 \\
\cdots & & \cdots \\
0,\ \frac{1}{2}(n-1) & 1,\ \frac{1}{2}(n+1) & n-1,\ \frac{1}{2}(n-3)
\end{array}$$

یک چیدمان دوری از n شیء و با r تکرار (r زوج است)، از ترکیب $s = \frac{۱}{۲}r$ مجموعهٔ دوری حاصل می‌شود. مجموعه‌های انتخاب شده متناظرند با s مهرهٔ سفید روی یک گردنبند با $m = \frac{۱}{۲}(n-۱)$ مهره و مهره‌های سیاه متناظرند با s' مجموعهٔ دوری که انتخاب نشده‌اند. از آنجایی‌که $s = ۳$ و $s' = ۳$ متناظر است با $n = ۱۲$ و $r = ۶$، در نتیجه چهار چیدمان دوری ناهمریخت از این اندازه وجود دارد. برای عدد اول n، نتایج مشابه برای چیدمان‌های دوری با اندازهٔ بلوک بزرگتر از ۲ برقرار هستند. زمانی‌که n اول نباشد، نتایج پیچیده‌تر هستند.

۶ مربع‌های لاتین و گریکو-لاتین

در سال ۱۷۸۲ اویلر یک مقالهٔ طولانی با عنوان (در ترجمه از زبان فرانسوی) «تحقیقات روی یک نوع جدید از مربع جادویی» منتشر کرد. او چنین آغاز کرد:

«یک سوال عجیب که برای چندین بار بهترین ذهن‌های جهان را به تفکر واداشته است، مرا به تحقیق در زمینه‌های زیر تحریک کرده است. به نظر می‌رسد که آن‌ها شاخهٔ جدیدی از ریاضیات و به ویژه نظریهٔ ترکیبیات را باز می‌کنند. این سوال مربوط به مجموعه‌ای از ۳۶ افسر از ۶ دسته و ۶ هَنگ مختلف است که باید در یک مربع به گونه‌ای قرار بگیرند که هر ردیف و هر ستون شامل ۶ افسر از دسته‌ها و همچنین هَنگ‌های مختلف باشد. اکنون پس از همهٔ زحماتی که ما برای حل این مسئله انجام داده‌ایم، باید تصدیق کنیم که چنین چیدمانی کاملاً غیرممکن است. با این‌حال ما نمی‌توانیم اثباتی دقیق از این نتیجه ارائه دهیم.»

مشهور است که اویلر همچنین حدس زد که چنین چیدمانی برای مربع‌های $n \times n$ با $n = ۴k + ۲$ که در آن $k = ۲, ۳, ۴, ...$، غیرممکن است. بیش از یک قرن قبل از اویلر، در یک بررسی جامع توسط تاریِ[۲۸] [۴۸]، رسماً ثابت شد که این حدس برای $n = ۶$ درست است و حتی مدت‌ها پیش از «اسپویلرهای اویلر[۲۹]»، نشان داد که تنها برای $n = ۶$ (ازجمله $n = ۱, ۲$)، چیدمان غیر ممکن است (مثلاً منبع [۳] را ببینید). همچنین محاسبات

[28] Tarry
[29] Euler spoilers

بسیار خوب اما دارای روابط ریاضی سنگین که توسط دِی‌نَش[30] و کیدوِل[31] [۱۰، ۱۱] و مقالهٔ مربوط به کیلوِه[32] و اِستِمبوسکی[33] [۳۴] را برای تاکید بر پیشرفت‌های پس از اویلر ببینید.

اویلر اصطلاح «مربع لاتین» را ابداع کرد. او همچنین «مربع‌های کامل» را معرفی کرد که بعضی از اوقات به آن‌ها «مربع‌های اویلری» نیز گفته می‌شود و سرانجام در سال ۱۹۳۴ توسط فیشر[34] و ییتس[35] به «مربع‌های گریکو-لاتین (GLSs) » نامگذاری شدند [۲۴]. شکل ۲ یک مربع گریکو-لاتین ۴ × ۴ را نشان می‌دهد: حروف لاتین و یونانی هرکدام از مربع‌ها را تشکیل می‌دهند و به این ترتیب حروف لاتین و یونانی در تمام ۱۶ جفتِ ممکن رخ می‌دهند.

aα	bγ	cδ	dβ
bβ	aδ	dγ	cα
cγ	dα	aβ	bδ
dδ	cβ	bα	aγ

شکل ۲: یک مربع گریکو-لاتین از مرتبه ۴ × ۴.

اویلر به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاری او در ریاضیات تفریحی است و مطرح کردن چالش‌های جالب از اهمیت گسترده‌ای برخوردار است، هرچند که او هیچ تصوری از طراحی آزمایش‌ها نداشت. تعجب آور است که مدتی نه چندان دور پس از مقالهٔ اویلر، یک مقالهٔ قابل توجه در بخش کشاورزی [۱۲] ظاهر شد که حاوی یک مربع لاتین ۴ × ۴ در یک آزمایش بر روی ۱۶ گوسفند از چهار نژاد مختلف بود که از چهار رژیم مختلف تغذیه می‌کردند و در چهار زمان مختلف ذبح می‌شدند. این مقاله هیچ اشاره‌ای به نام اویلر نداشت. فریمن[36] [۲۶] اظهار داشت که این «اولین مقاله‌ای است که شرح داد چه چیزی ممکن است به‌عنوان یک آزمایش آماری طراحی شده در کشاورزی باشد».

[30]Dénes
[31]Keedwell
[32]Klyve
[33]Stemboski
[34]Fisher
[35]Yates

اویلر پرسید که چه تعداد مربع لاتین متمایز با اندازهٔ $n \times n$ برای n کوچک وجود دارد، به این معنا که در چندین روش ما می‌توانیم فضاهای خالی در شکل ۳ را پر کنیم، که در آن هم سطر اول و هم ستون اول با ترتیب طبیعی استاندارد شده‌اند.

1	2	…	n
2			
⋮			
n			

شکل ۳: سطر اول و ستون اول یک مربع لاتین استاندارد شده.

توجه داشته باشید که اویلر از روی لجبازی اعداد را به شکل عربی به‌کار برد. او به درستی پاسخ‌های ۱، ۴ و ۵۶ را برای $n = 3, 4, 5$ بدست آورد، اما بدون شک وقتی که او تعدادی را که برای $n = 6$ یعنی ۹۴۰۸ را بدست آورد، شگفت زده شد (مثلاً منبع [۲۴] را ببینید). همچنین به جدول‌های XV و XVI از منبع [۲۵] مراجعه کنید. نویسندگان بر ضرورت انتخاب یک مربع به طور تصادفی تاکید کردند.

[36]Freeman

اما چگونه می‌توان از یک مربع لاتین (LS) به یک مربع گریکو-لاتین (GLS) دست یافت؟ اویلر پاسخ ساده‌ای برای این سوال نداشت، اما یک پیشنهاد کمکی کرد و آن هم این بود که یک *خط هادی*[۳۷] (خط مستقیم) که در حال حاضر معمولاً به آن یک *خط مقطع عرضی*[۳۸] گفته می‌شود، رسم شود. یک برش عرضی از یک مربع لاتین از مرتبهٔ n، یک زیرمجموعهٔ مرتب شده از ارقام ۱, ۲, ..., n است به‌طوری که هر ستون و هر سطر مربع شامل یک رقم متفاوت باشد. ما این موضوع را برای $n =$ ۴ شرح می‌دهیم. سطر دوم مربع استاندارد شده تنها می‌تواند به‌صورت ۲۱۴۳، ۲۳۴۱، یا ۲۴۱۳ باشد. خواننده می‌تواند بررسی کند که تنها در مورد اول، بیش از یک راه برای تکمیل مربع می‌تواند وجود داشته باشد. همان‌طور که اویلر اشاره کرد، نتایج همان مربع‌های حاصل شده در شکل ۴ هستند.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	4	3	2	1	4	3	2	3	4	1	2	4	1	3
3	4	1	2	3	4	2	1	3	4	1	2	3	1	4	2
4	3	2	1	4	3	1	2	4	1	2	3	4	3	2	1

شکل ۴: مربع‌های لاتین ۴ × ۴ استاندارد شدهٔ امکان‌پذیر.

یک راه‌حل آسان دیگر برای بررسی این است که از طریق ستون‌ها از چپ به راست خط برش عرضی را رسم کنیم که فقط برای مربع اول، یک برش عرضی با شروع از ۱ وجود دارد؛ در واقع دو برش عرضی برای هر یک از ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد (شکل ۵). از آنجایی‌که برش‌های عرضی همساز هستند (مثلاً به‌صورت مربع‌های لاتین هستند)، آن‌ها دو مربع گریکو-لاتین را تولید می‌کنند (شکل ۶).

1	3	4	2	1	4	2	3	
2	4	3	1	2	3	1	4	برش عرضی برای
3	1	2	4	3	2	4	1	1 2 3 4
4	2	1	3	4	1	3	2	

شکل ۵: برش‌های عرضی برای اولین مربع لاتین از شکل ۴.

1^1	2^3	3^4	4^2	1^1	2^4	3^2	4^3
2^2	1^4	4^3	3^1	2^2	1^3	4^1	3^4
3^3	4^1	1^2	2^4	3^3	4^2	1^4	2^1
4^4	3^2	2^1	1^3	4^4	3^1	2^3	1^2

شکل ۶: مربع‌های گریکو-لاتین ۴ × ۴.

ساده‌ترین مربع‌های لاتین مانند سومین مربع در شکل ۴ هستند. ما این بخش را با یک اثبات زیبا از اویلر به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۱. *برای nهای زوج، یک مربع لاتین دوری، برش عرضی نمی‌پذیرد.*

اثبات. فرض کنید یک برش عرضی برای ۱ وجود دارد. مثلاً

$$۱ \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad \dots$$

که در آن $n -$ ۱ حرف a، b، c و ... وجود دارد که نشان‌دهندهٔ اعداد ۲، ۳، ۴ و... هستند. در ستون‌های α، β، γ و ... به‌ترتیب مشخص شده‌اند. بدین‌گونه در سومین مربع لاتین ۴ × ۴ مربوط به شکل ۴، $\alpha =$ ۳ نتیجه می‌دهد $a =$ ۴. حروف یونانی نیز جایگشتی از ۲،

[۳۷] directrix
[۳۸] transversal

۳، ۴ و ... هستند. برای اینکه

$$\alpha+\beta+\gamma+...=a+b+c+.... \qquad (۸)$$

اما از آنجایی که a از ستون دوم کشیده شده است و در سطر α است، آن از ساختار دوری از LS پیروی می‌کند که $a=\alpha+۱$. به همین ترتیب $b=\beta+۲$ و ...، که در صورت لزوم باید a، b، c، ... به $\mathrm{mod}n$ کاهش یابند. اگر $S=...+\alpha+\beta+\gamma$، آنگاه داریم:

$$a+b+c+...=S+۱+...+(n-۱)-\lambda n,$$

که در آن λ یک عدد صحیح مثبت است. اکنون با پیروی از (۸) خواهیم داشت که

$$\frac{۱}{۲}n(n-۱)=\lambda n$$

یا

$$\lambda=\frac{۱}{۲}(n-۱)$$

که اگر n زوج باشد این امر غیرممکن است.

۷ توابع مولد

مفهوم توابع مولد به استنتاج دِموآور[39] [۹] از توزیع مجموع نقاط زمانی‌که n تاس ریخته می‌شود برمی‌گردد (مثلاً [۴۴] را ببینید). سی‌اِل[40] اشاره کرد [۴۴، صفحه ۶۸] که اویلر در سال ۱۷۸۸ در یک مقاله [۲۰] ثابت کرده بود که توزیع جمع $\sum x_i$ از n متغیر تصادفی مستقل با تابع جرم احتمال $f_i(x)(i=۱,...,n)$، توسط حاصل‌ضرب $t^{\sum x_i}$ در $(\sum f_i(x_i)t^{x_i})^n$ مشخص می‌شود. تا همین اواخر، اویلر چند یادداشت دیگر را برای کار هوشمندانه خودش بر روی توابع مولد دریافت کرد و این اصطلاح منسوب به لاپلاس[41] [۳۶] است. در واقع این یادداشت در رسالهٔ معروف لاپلاس [۳۷] با یک حساب طولانی از توابع مولد یک متغیره و دو متغیره شروع می‌شود. لاپلاس در این بخش خاص به اویلر اشاره‌ای نکرده است. همچنین صفحه ۴۸۴ از منبع [۴۹] را ببینید. ساندیفر [۴۳، فصل ۱۴] ما را آگاه کرد که ریاضیدان فیلیپ نادیِ[42] از اویلر پرسید: «به چند طریق می‌توان عدد ۵۰ را به‌صورت مجموع هفت عدد صحیح مثبت و متمایز نوشت؟». این سوال، اگرچه به خودی خود اهمیتی ندارد، اما کنجکاوی اویلر را برانگیخت. پاسخ سوال: ۵۲۲ (به منبع [۱۸] رجوع کنید). اویلر تابع مولد زیر را یافت:

$$(۱+xz)(۱+x^۲z)(۱+x^۳z)(۱+x^۴z)(۱+x^۵z)(۱+x^۶z)... \qquad (۹)$$

تابع مولد فوق برای این نوع از محاسبات مناسب است. مثلاً اگر می‌خواهیم بدانیم که چگونه می‌توان اعداد ۶ تا ۹ را به‌صورت جمع سه عدد صحیح مثبت متمایز بیان کرد، ما ضریب $z^۳$ را در تابع مولد (۹) بدست می‌آوریم، که یعنی

$$x^۶+x^۷+۲x^۸+۳x^۹+... \quad . \qquad (۱۰)$$

مثلاً $۲x^۸$ به ما می‌گوید که ۸ می‌تواند به دو طریق برحسب مجموع سه عدد صحیح مثبت متمایز نوشته شود. به‌طور کامل:

[39] DeMoivre's
[40] Seal
[41] Laplace
[42] Philip Naudé

$$\begin{array}{lll} 6=1+2+3 & 8=1+2+5 & 9=1+2+6 \\ 7=1+2+4 & 8=1+3+4 & 9=1+3+5 \\ & & 9=2+3+4 \end{array}$$

اویلر اذعان کرد زمانی‌که ما برای اعداد بزرگ اقدام کنیم، روند فوق خسته کننده می‌شود، اما سری‌های مشابه (۱۰) می‌توانند یک‌بار برای همیشه بسط داده شوند. به‌گونه‌ای خلاقانه او حاصل‌ضرب‌ها یا سری‌های نامتناهی دیگری را برای بخش‌بندی سایر خصوصیات ایجاد کرد. مثلاً اگر ما بخواهیم بدانیم که عدد ۶ را به چند طریق می‌توان به‌صورت مجموع هر تعداد عدد صحیح مثبت متمایز نوشت، در رابطهٔ (۹) قرار می‌دهیم $z=1$ و خواهیم داشت:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + \dots \quad .$$

بنابراین به چهار طریق می‌توان عدد ۶ را بر حسب اعداد صحیح مثبت متمایز نوشت:

$$6=6, \quad 6=5+1, \quad 6=4+2, \quad 6=3+2+1.$$

همچنین به «توابع تولید» در فهرست کتاب‌های نوشته شده توسط استیگلر [۴۶] و کتاب مربوط هاپکینز[43] و ویلسون [44] [۳۱] رجوع کنید.

مراجع

[۱] Bellhouse, D. R. (1991). The Genoese Lottery. Statistical Science, 6, 141–148.

[43] Hopkins
[44] Wilson

[۲] Bellhouse, D. R. (2007). “Euler and Lotteries” in Leonhard Euler: Life, Work and Legacy. eds. R. E. Bradley and C. E. Sandifer. Elsevier, Amsterdam, 5, 385–394.

[۳] Bose, R. C., Shrikhande, S. S. and Parker, E. T. (1960). Further Results on the Construction of Mutually Orthogonal Latin Squares and the Falsity of Euler’s Conjecture. Canadian Journal of Mathematics, 39, 189–203.

[۴] Calinger, R. S. (2007). Leonhard Euler. Life and Thought, in Leonhard Euler: Life, Work and Legacy, eds. R. E. Bradley and C. E. Sandifer, Elsevier, Amsterdam, 5–60.

[۵] Chandrasekharan, K. (1968). Introduction to Analytic Number Theory. Springer, Berlin.

[۶] David, F. N. and Barton, D. E. (1962). Combinatorial Chance Griffin. London.

[۷] David, H. A. (1988). The Method of Paired Comparisons (2nd ed.) Griffin. London and Oxford University Press, New York.

[۸] David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003). Order Statistics (3rd ed.). Wiley, Hoboken, NJ.

[۹] De Moivre, A. (1730). Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis. Tonson and Watts, London.

[۱۰] Dénes, J. and Keedwell, A. D. (1974). Latin Squares and Their Applications. Academic Press, New York.

[۱۱] Dénes, J., and Keedwell, A. D. (1991). Latin Squares: New Developments in the Theory and Applications. North-Holland, Amsterdam.

[۱۲] de Palluel, C. (1790). Sur les avantages et l'économie que procurent les racines employées à l'engrais des moutons à l'étable, Mémoires d'agriculture, trimestre d'été, 17–23. English translation, Annals of Agriculture. 14, 133–139.

[۱۳] Euler, L. (1738). De progressionibus transcendentibus. . .. Opera Omnia, Ser. 1, 14, 1–24.

[۱۴] Euler, L. (1740). De summis serierum reciprocarum. Opera Omnia, Ser. 1, 14, 73–86.

[۱۵] Euler, L. (1740). De progressionibus harmonicis observationes. Opera Omnia, Ser. 1, 14, 87–100.

[۱۶] Euler, L. (1743). Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli. Opera Omnia, Ser. 1, 17, 1–34.

[۱۷] Euler, L. (1743). Demonstration de la somme de cette suite $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+etc.$ Opera Omnia, Ser. 1, 14, 177–186.

[۱۸] Euler, L. (1751). Observationes analyticae variae de combinationibus. Opera Omnia, Ser. 1, 2, 163–193.

[۱۹] Euler, L. (1763). Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata. Opera Omnia, Ser. 1, 2 , 531–555.

[۲۰] Euler, L. (1923). Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen 9, Middleburg, 85–239. Reproduced with minor corrections in Opera Omnia, Ser. 1, 7, 291–392.

[۲۱] Euler, L. (1788). Éclaircissemens sur le mémoire de Mr. de la Grange inseré dans le V^e volume des Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations etc. Opera Omnia, Ser. 1, 7, 425–434.

[۲۲] Euler, L. (1794). De valoribus integralium. . . Opera Omnia, Ser. 1, 19, 217–227.

[۲۳] Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928). Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180–190.

[۲۴] Fisher, R. A., and Yates, F. (1934). The 6 × 6 Latin Squares. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 30, 492–507.

[۲۵] Fisher, R. A., and Yates, F. (1963). Statistical Tables. 6th ed., Oliver and Boyd, London.

[۲۶] Freeman, G. H. (1982). Agriculture, Statistics. in Encyclopedia of Statistical Sciences, Wiley, New York,1, 34–37.

[۲۷] Gauss, C. F. (1985). Disquisitiones arithmeticae. Springer, New York, (English translation of Gauss's Latin publication of 1801).

[۲۸] Hald, A. (1990). A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750. Wiley, New York.

[۲۹] Hald, A. (1998). A History of Mathematical Statistics From 1750 to 1930. Wiley, New York.

[۳۰] Heyde, C. C. and Seneta, E. (2001). Statisticians of the Centuries. Springer, New York.

[۳۱] Hopkins, B. and Wilson, R. (2007). Euler's Science of Combinations, in Leonhard Euler: Life, Work and Legacy 2007, eds. R. E. Bradley and C. E. Sandifer. Elsevier, Amsterdam, 395–408.

[۳۲] Jablonski, E. , Théorie des permutations et des arrangements circulaires complets, *Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser.*, 4, 8 (1892), 331–349.

[۳۳] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1997). Leading Personalities in Statistical Sciences. Wiley, New York.

[۳۴] Klyve, D. and Stemboski, L. (2007). Graeco-Latin Squares and a Mistaken Conjecture of Euler, in The Genius of Euler—Reflections on His Life and Work, ed.W. Dunham. The Mathematical Association of America, 273–288.

[۳۵] Komzsik, L. (2009). Applied Calculus of Variations for Engineers. Boca Raton, FL: CRC Press.

[۳۶] Laplace, P. S. (1782), Mémoire sur les suites. Histoire de l'Académie de Paris, 207–309.

[۳۷] Laplace, P. S. (1812). Théorie analytique des probabilités. Courcier, Paris.

[۳۸] Legendre, A. M. (1811). Exercises de calcul intégrale. Paris.

[۳۹] Pearson, K. (1978). The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries Against the Changing Background of Intellectual, Scientific and Religious Thought, ed. E. S. Pearson. Griffin, London.

[۴۰] Plackett, R. L. (1947). Limits of the Ratio of Mean Range to Standard Deviation. Biometrika, 34, 120–122.

[۴۱] Sandifer, C. E. (2007). Euler's Solution of the Basel Problem, in Euler at 300—An Appreciation, eds. R. E. Bradley, L. A. D'Antonio, and C. E. Sandifer. Mathematical Association of America, 105–118.

[۴۲] Sandifer, C. E. (2007). The Early Mathematics of Leonhard Euler. Mathematical Association of America.

[۴۳] Sandifer, C. E. (2007). How Euler Did It. The Mathematical Association of America.

[۴۴] Seal, H. L. (1949). The Historical Development of the Use of Generating Functions in Probability Theory, Bulletin de l'Association des Actuaires Suisses, 49, 209–228. Reprinted in Kendall, M. G., and Plackett, R. L. (eds), Studies in the History of Statistics and Probability. Griffin, London, 2, 67–86.

[۴۵] Sheynin, O. B. (1972). On the Mathematical Treatment of Observations by L. Euler. Archive for History of Exact Sciences, 9, 45–56.

[۴۶] Stigler, S. M. (1986). The History of Statistics. Cambridge, MA: Harvard.

[۴۷] Stigler, S. M. (1999). Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods. Cambridge, MA: Harvard.

[۴۸] Tarry, G. (1901). Le problème des 36 officiers, Compte rendu. Association française pour l'Avancement des Sciences, 29, 170–203.

[۴۹] Todhunter, I. (1949). A History of theMathematical Theory of Probability. Macmillan, London, Reprinted Chelsea, New York.

[۵۰] Wallis, J. (1655). Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi . . . Oxford,182. Opera Mathematica, 355.