بررسی امید ریاضی $S^۲$ تحت وابستگی نمونه

حمید بیدرام*

چکیده

می‌دانیم که وقتی $X_۱$، $X_۲$، $\cdots$، X_n متغیرهای تصادفی ناهمبسته هر یک با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند $S_u^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^۲$ یک برآوردگر نااریب برای $\sigma^۲$ است. دیوید (۱۹۸۵) $E(S_u^۲)$ را وقتی X_iها به‌هم وابسته اند به‌دست آورده است. در این مقاله ضمن معرفی رابطهٔ دیوید برای $E(S_u^۲)$، به کمک یک قضیه و چند رابطهٔ دیگر به بررسی و تحلیل آن رابطه پرداخته‌ایم.

فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱$،$X_۲$،$\cdots$،X_n هر یک با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، وقتی X_iهابه‌هم وابسته‌اند، در اختیار باشند در این صورت

$$\begin{aligned} E(S_u^۲) &= \frac{۱}{n-۱}E(\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^۲) \\ (n-۱)E(S_u^۲) &= E(\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\mu)^۲ - n(\bar{X}-\mu)^۲) \\ &= n\sigma^۲ - nVar(\bar{X}). \end{aligned} \tag{۱}$$

ازطرفی با فرض اینکه به ازای هر $i \neq j$،

$$\rho(X_i, X_j) = \rho$$

داریم،

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^۲}{n} + \frac{n-۱}{n}\rho\sigma^۲.$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$E(S_u^۲) = (۱-\rho)\sigma^۲. \tag{۲}$$

باتوجه به اینکه $Var(\sum_{i=۱}^{n} X_i) \geq ۰$،

$$\frac{-۱}{n-۱} \leq \rho \leq ۱. \tag{۳}$$

ازآنجایی که $E(S_u^۲)$ در (۲) تابعی پیوسته و نزولی از ρ در بازهٔ (۳) است لذا

$$۰ \leq E(S_u^۲) \leq \frac{n}{n-۱}\sigma^۲, \tag{۴}$$

و این همان رابطه ای است که دیوید (۱۹۸۵) به آن اشاره کرده است.

حال اگر تعریف کنیم $S_b^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\bar{X})^۲$، آنگاه

$$E(S_b^۲) = \sigma^۲ - Var(\bar{X}). \tag{۵}$$

بنابراین

$$E(S_b^۲) = \frac{n-۱}{n}(۱-\rho)\sigma^۲ \tag{۶}$$

و نهایتاً

$$۰ \leq E(S_b^۲) \leq \sigma^۲. \tag{۷}$$

حال اگر فرض کنیم،

$$S_k = Cov(X_t, X_{t-k}), \quad k = ۰, \pm۱, \pm۲, \cdots$$

* عضوهیئت علمی دانشگاه اصفهان، گروه آمار

تابع اتوکوواریانس فرایند مانای $\{X_t\}$ باشد، به کمک قضیهٔ زیر می‌توان نشان داد که کرانهای پایین روابط (۴)، (۷) در صفر تثبیت شده و بالاتر از صفر نخواهند آمد. هر چند ممکن است نتیجه از اینکه ρ در رابطهٔ (۳) صدق می‌کند، بدیهی به نظر برسد ولی قضیهٔ زیر این نتیجه را به طور کلی اثبات می‌کند.

باید دقت داشت که وقتی k مقادیر بزرگ را اختیار می‌کند S_k به سمت صفر میل کرده و بنابراین وقتی $n \longrightarrow \infty$، $Var(\bar{X}) \longrightarrow 0$ و در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} E(S_b^2) = \sigma^2,$$

که نشان می‌دهد در این حالت S_b^2 به طور مجانبی برای σ^2 نااریب است. بنابراین قضیهٔ زیر را برای حالتی که n متناهی است، بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. برای هر $n \geq 1$ و هر $\varepsilon > 0$ فرایند مانایی وجود دارد که

$$\frac{E(S_b^2)}{\sigma^2} < \epsilon.$$

برهان. فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرایند مانای اتورگرسیو مرتبهٔ اول؛ یعنی به‌صورت

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t$$

باشد که در آن $|\phi| < 1$ و e_t یک فرایند اغتشاش خالص با میانگین صفر و واریانس یک است. برای این فرایند داریم

$$\sigma^2 = \frac{1}{1-\phi^2}$$

و

$$S_k = \phi^{|k|} \cdot \sigma^2$$

که در آن σ^2، واریانس $\{X_t\}$ است.

با توجه به رابطه (۵) و نتیجهٔ

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n} S_{t-u}$$

به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{E(S_b^2)}{\sigma^2} \quad = \quad 1 - \frac{1}{n^2}\sum_t\sum_u \phi^{|t-u|}$$

$$= \quad 1 - f(\phi).$$

اگر $n > 1$، $f(\cdot)$ تابعی اکیداً صعودی پیوسته از ϕ در بازهٔ $[0, 1]$ است و چون $f(0) = \frac{1}{n}$، $f(1) = 1$ می‌توان یک مقدار $\phi < 1$ به‌دست آورد به طوری که

$$1 - f(\phi) < \epsilon$$

و بنابراین برهان کامل است (حالت $n = 1$ حالتی بدیهی است زیرا $S_b^2 = 0$).

مراجع

[1] David, H. A. (1985). Bias of S^2 under dependence, The American Statistician, 39, 201.

[2] Percival, D. B. (1993). Three Curious Properties of the Sample Variance, The American Statistician, 47, 4, 274-6.

[3] Fuller, W. A. (1976). Introduction to Statistical Time Series, New York, John Wiley & Sons.