توزیع مجموع متغیرهای تصادفی برنولی وابسته در حالت خاص

احمد نورالله[1]

چکیده

فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع مفروض باشند عموماً در استنباط آماری و دیگر مباحث آمار و احتمال یافتن توزیع متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^{n} X_i$ از اهمیت بالایی برخوردار است. غالباً در متون آماری یافتن توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ در حالتی که X_iها همتوزیع و مستقل هستند مورد بحث قرار گرفته است، هدف این نوشته تعیین توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ در حالتی X_iها وابسته و دارای توزیع $B(1,\frac{1}{n})$ باشند است و نشان می‌دهیم که توزیع حدی آن پوآسن خواهد شد.

واژه‌های کلیدی : توزیع دوجمله‌ای، وابستگی، توزیع مجموع.

۱– مقدمه

فرض کنید $X_i \sim B(1,p)$ و $i=1,2,\dots,n$، در متون پایه آماری نشان داده می‌شود هنگامی که متغیرها مستقلند، متغیر $\sum_{i=1}^{n} X_i$ دارای توزیع $B(n,p)$ است (برای مثال: هاگ و کریگ[2] [۱] را ببینید). در بعضی از مسائل آماری حالاتی بوجود می‌آید که در آن فرض استقلال متغیرها وجود ندارند و لذا یافتن توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ کار ساده‌ای نیست. در این نوشته علاقه‌مندیم توزیع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ را در حالتی که X_iها وابسته و دارای توزیع $B(1,\frac{1}{n})$ و $i=1,2,\dots,n$ هستند به‌دست آوریم. برای اطلاع بیشتر در این زمینه به [۱،۲و۳] مراجعه شود.

۲– متغیر تصادفی شبه دوجمله‌ای

فرض n تا جعبه که از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و n تا توپ را که نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند می‌خواهیم در این جعبه‌ها بریزیم (در هر جعبه یک توپ).

متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

X : *تعداد جعبه‌هایی که با توپ هم شماره خود پر می‌شود*

همچنین،

$$X_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر جعبه } i\text{ام با توپ شماره } i \text{ پر شود،} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$

آنگاه داریم :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

فرض کنید پیشامد F_i برای $i=1,2,\dots,n$ به صورت زیر تعریف شود:

F_i : *پیشامد اینکه جعبه iام جور باشد*

حال داریم :

$$P(X_i = ۰) = P(F_i') = ۱ - \frac{۱}{n},$$

$$P(X_i = ۱) = P(F_i) = \frac{(n-۱)!}{n!} = \frac{۱}{n},$$

لذا توزیع X_i به صورت زیر است :

x_i	۰	۱
$P(X_i = x_i)$	$۱-\frac{۱}{n}$	$\frac{۱}{n}$

---

[1] گروه آمار- دانشگاه اصفهان

[2] Hogg and Craig

در نتیجه : $X_i \sim B(1,\frac{1}{n})$ برای $i=1,2,\dots,n$، لذا X_iها همگی همتوزیع ولی وابسته به هم هستند، حال می‌خواهیم توزیع $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ و امید و واریانس آن را محاسبه کنیم.

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1,$$

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)$$

$$=P(F_i\cap F_j)=\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$=\frac{1}{n(n-1)},\forall i\neq j$$

بنابراین برای هر $i\neq j$:

x_ix_j	0	1
$P(X_iX_j=x_ix_j)$	$1-\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$

در نتیجه :

$$E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$$

$$Cov(X_i,X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$$

لذا :

$$V(X)=V(\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)+\sum\sum_{i\neq j} Cov(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})+\sum\sum_{i\neq j}\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$=n[\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})]+(n^2-n)\frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$=(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}=1$$

۳- توزیع X

برای یافتن توزیع X داریم :

$$X: R_x=\{0,1,2,\dots,n\}-\{n-1\},$$

$$P(X=n)=P(\text{هر } n \text{ تا عمل جور باشد})=P(\bigcap_{i=1}^{n}F_i)=\frac{1}{n!},$$

$$P(X=0)=P(\text{هر } n \text{ تا عمل ناجور باشد})=P(\bigcap_{i=1}^{n}F_i')$$

$$=P((F_1\cup F_2\cup\dots\cup F_n)')=1-P(\bigcup_{i=1}^{n}F_i)$$

$$=1-[\sum_i p(F_i)-\sum_{i<j}P(F_i\cap F_j)$$

$$+\sum_{i<j<k}P(F_i\cap F_j\cap F_k)+\dots+(-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{n}F_i)]$$

$$=1-[\binom{n}{1}P(F_1)-\binom{n}{2}P(F_1\cap F_2)$$

$$+\binom{n}{3}P(F_1\cap F_2\cap F_3)-\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}P(\bigcap_{i=1}^{n}F_i]$$

$$=1-[\binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}$$

$$+\binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!}-\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{0!}{n!}]$$

$$=1-[\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}],$$

در نتیجه :

$$P(X=0)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\dots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}.$$

از طرفی :

$$P(X=1)=P(\text{تنها یک عمل جور داشته باشیم})$$

$$=\binom{n}{1}P((\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i')\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{1}P(\bigcap_{i=1}^{n-1}F_i'|F_n)P(F_n)$$

$$=\binom{n}{1}P((\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i)'|F_n)P(F_n)$$

$$=\binom{n}{1}[1-P(\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i|F_n)]P(F_n)$$

$$=\binom{n}{1}[1-(\binom{n-1}{1}\frac{(n-2)!}{(n-1)!}-\binom{n-1}{2}\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$$

$$+\dots+(-1)^{n}\binom{n-1}{n-1}\frac{0!}{(n-1)!})]\frac{(n-1)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{1}[1-(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\dots+(-1)^{n}\frac{1}{(n-1)!})]\frac{(n-1)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{1}(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})\frac{(n-1)!}{n!}$$

در نتیجه :

$$P(X=۱)=\frac{۱}{۱!}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-.....+(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{(n-۱)!}).$$

و همچنین:

$$P(X=۲)=P(\text{تنها دو عمل جور داشته باشیم})$$

$$=\binom{n}{۲}P((\bigcap_{i=۱}^{n-۲}F_i')\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۲}.P(\bigcap_{i=۱}^{n-۲}F_i'\big|F_{n-۱}\cap F_n).P(F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۲}.P((\bigcup_{i=۱}^{n-۲}F_i)'\big|F_{n-۱}\cap F_n).P(F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۲}.[۱-P(\bigcup_{i=۱}^{n-۲}F_i\big|F_{n-۱}\cap F_n)].P(F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۲}.[۱-(\binom{n-۲}{۱}\frac{(n-۳)!}{(n-۲)!}-\binom{n-۲}{۲}\frac{(n-۴)!}{(n-۲)!}$$

$$+...+(-۱)^n\binom{n-۲}{n-۲}\frac{۰!}{(n-۲)!})].\frac{(n-۲)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{۲}[۱-(\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}+...+(-۱)^n\frac{۱}{(n-۲)!})]\frac{(n-۲)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{۲}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...+(-۱)^{n-۲}\frac{۱}{(n-۲)!})\frac{(n-۲)!}{n!}$$

لذا داریم :

$$P(X=۲)=\frac{۱}{۲!}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...+(-۱)^{n-۲}\frac{۱}{(n-۲)!}).$$

$$P(X=۳)=P(\text{تنها سه عمل جور داشته باشیم})$$

$$=\binom{n}{۳}P((\bigcap_{i=۱}^{n-۳}F_i')\cap F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۳}P(\bigcap_{i=۱}^{n-۳}F_i'\big|F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$\times P(F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۳}.P((\bigcup_{i=۱}^{n-۳}F_i)'\big|F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$\times P(F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۳}.[۱-P(\bigcup_{i=۱}^{n-۳}F_i\big|F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)]$$

$$\times P(F_{n-۲}\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{۳}[۱-(\binom{n-۳}{۱}\frac{(n-۴)!}{(n-۳)!}-\binom{n-۳}{۲}\frac{(n-۵)!}{(n-۳)!}$$

$$+...+(-۱)^{n-۲}\binom{n-۳}{n-۳}\frac{۰!}{(n-۳)!})].\frac{(n-۳)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{۳}[۱-(\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}+...+(-۱)^{n-۲}\frac{۱}{(n-۳)!})]\frac{(n-۳)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{۳}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...+(-۱)^{n-۳}\frac{۱}{(n-۳)!})\frac{(n-۳)!}{n!}.$$

بنابراین :

$$P(X=۳)=\frac{۱}{۳!}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-.....+(-۱)^{n-۳}\frac{۱}{(n-۳)!}).$$

و به همین ترتیب برای هر $x\in R_x$ داریم:

$$P(X=x)=P(\text{تنها } x \text{ تا عمل جور داشته باشیم})$$

$$=\binom{n}{x}P(F_۱'\cap F_۲'\cap...\cap F_{n-x}'\cap F_{n-x+۱}$$

$$\cap F_{n-x+۲}\cap...F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{x}P(F_۱'\cap...\cap F_{n-x}'\big|F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$\times P(F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{x}P((F_۱\cup...\cup F_{n-x})'\big|F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$\times P(F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{x}[۱-P(F_۱\cup...\cup F_{n-x}\big|F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}$$

$$\cap F_n)]P(F_{n-x+۱}\cap...\cap F_{n-۱}\cap F_n)$$

$$=\binom{n}{x}[۱-(\binom{n-x}{۱}\frac{(n-x-۱)!}{(n-x)!}-\binom{n-x}{۲}\frac{(n-x-۲)!}{(n-x)!}$$

$$+...+(-۱)^{n-x+۱}\binom{n-x}{n-x}\frac{۰!}{(n-x)!})]\frac{(n-x)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{x}[۱-(\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}+...+(-۱)^{n-x+۱}\frac{۱}{(n-x)!})]\frac{(n-x)!}{n!}$$

$$=\binom{n}{x}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...+(-۱)^{n-x}\frac{۱}{(n-x)!})\frac{(n-x)!}{n!}$$

بنابراین:

$$P(X=x)=\frac{۱}{x!}(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+...+(-۱)^{n-x}\frac{۱}{(n-x)!}).$$

در نتیجه :

$$P(X=x)=f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x!}\displaystyle\sum_{j=2}^{n-x}\dfrac{(-1)^j}{j!} & , \quad x<n-1 \\ \dfrac{1}{n!} & , \quad x=n \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

۴- توزیع حدی

توزیع حدی آن در مقایسه با توزیع دوجمله‌ای :

اگر $n\to\infty$، $f(x)=\dfrac{1}{x!}e^{-1}$.

و اگر $X\sim B(n,\dfrac{1}{n})$ آنگاه:

$$f(x)=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{n}\right)^x\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{1}{x!}\frac{n!}{(n-x)!}\frac{1}{n^x}\cdot\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^x}$$

$$=\frac{1}{x!}\cdot\frac{(n-x+1)(n-x+2)\ldots(n-1)n}{n^x}\cdot\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})^x},$$

در نتیجه :

$$f(x)=\frac{1}{x!}.1.\frac{e^{-1}}{1}=\frac{1}{x!}e^{-1}$$

اگر $n\to\infty$.

در جدول زیر خلاصه نکات ذکر شده مشاهده می شود.

X	توزیع غیرحدی			توزیع حدی		
	$E(X)$	$V(X)$	$f(x)$	$E(X)$	$V(X)$	$f(x)$
شبه‌دوجمله‌ای	۱	۱	$\frac{1}{x!}\sum_{j=2}^{n-x}\frac{(-1)^j}{j!}$	۱	۱	$\frac{1}{x!}e^{-1}$
دوجمله‌ای	۱	$1-\frac{1}{n}$	$\binom{n}{x}(\frac{1}{n})^x(1-\frac{1}{n})^{n-x}$	۱	۱	$\frac{1}{x!}e^{-1}$

منابع

[1]. Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1970). Introduction to Mathematical Statistics. 3rd ed.), New York: Macmillan.

[2]. Mood. A. M., Graybill, F. A. and Boes, D.C. (1974). Introduction to the Theory of Statistics. 3rd ed., McGraw-Hill.

[3]. Ross, S. M. (1983). Stochastic Processes. Wiley, New York.