استنباط برمبنای سانسور هیبرید نوع I و II

سمیرا نایبان[1]، ابوالقاسم بزرگ نیا[2]

چکیده

در این مقاله، ابتدا پس از بیان معایب سانسورهای نوع I و II به معرفی طرح سانسور هیبرید می پردازیم. سپس با بیان معایب این طرح ها، دو طرح سانسور هیبرید نوع I و II را معرفی کرده و به محاسبه تابع چگالی، تابع مولد گشتاور، توزیع دقیق برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم و کران اطمینان پایین برای میانگین طول عمر در توزیع نمایی در هر یک از این دو نوع سانسور را بدست می آوریم. در نهایت ذکر چند مثال، پایان بخش مفاهیم ذکر شده در این مقاله خواهد بود.

واژه های کلیدی: سانسور هیبرید نوع I و II، توزیع نمایی، آماره های ترتیبی، کران اطمینان، آزمون بقاء.

۱–مقدمه

یک آزمون بقا که در آن n واحد تحت آزمون قرار می‌گیرند و زمانهای شکست ثبت می‌شود، در نظر بگیرید. فرض کنید که طول عمر واحدها مستقل و هم توزیع با تابع چگالی زیر باشد :

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \qquad x\geq 0\ ,\ \theta>0,$$

همچنین طول عمرهای مرتب شده این واحدها، با $X_{1:n},\ldots,X_{n:n}$ نشان داده شوند.

اپستین[3][۷] یک طرح نمونه‌ای تحت سانسور هیبرید در نظر گرفت که در آن آزمون بقا در زمان تصادفی $T_1^*=\min\{X_{r:n},T\}$ به پایان می‌رسد که مقادیر $1\leq r\leq n$ و $T\in(0,\infty)$ از قبل تعیین شده‌اند. این طرح به طرح سانسور هیبرید موسوم است و به علت اینکه مانند طرح سانسور نوع I، نقطه پایان در اینجا نیز حداکثر در زمان T است، آنرا طرح سانسور هیبرید نوع I نام گذاری کرده اند. بارس لومو[4][۲]، بارلو[5] و همکاران[۱]، چن و باتاچاریا[6][۳]، کوهن[7][٦] و چیلذر[8] و همکاران[٤] توزیع برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم[9] (MLE) θ و همچنین کران اطمینان پایین آن را تحت سانسور هیبرید نوع I، بدست آوردند.

مانند سانسور نوع I، سانسور هیبرید نوع I نیز دارای این عیب است که نتایج استنباط تحت شرایطی بدست می‌آیند که تعداد شکست های مشاهده شده حداقل یکی است و همچنین ممکن است تا زمان از پیش تعیین شده T، تعداد بسیارکمی شکست اتفاق بیافتد. برای رفع این مشکل طرح سانسور دیگری به نام سانسور هیبرید نوع II به صورت زیر ارائه شده است.

آزمایش بالا را در نظر بگیرید و فرض کنید که آزمایش در زمان تصادفی $T_2^*=\max(X_{r:n},T)$ به پایان برسد. در اینجا باز هم مقادیر $1\leq r\leq n$ و $T\in(0,\infty)$ از قبل تعیین شده‌اند.

این طرح دارای این مزیت است که تضمین می‌کند حداقل r شکست مشاهده می‌شوند. چنین طرحی ممکن است زمانی رخ دهد که محقق تصمیم دارد حداقل r شکست مشاهده کند.

---

[1] کارشناس ارشد آمار ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

[2] گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

[3] Epstein

[4] Bartholomew

[5] Barlow

[6] Chen and Bhattacharrya

[7] Cohen

[8] Childs

[9] Maximum Likelihood Estimators

اگر r شکست قبل از T رخ دهد، آنگاه محقق می‌تواند تا زمان T ادامه دهد تا از امکانات آزمون استفاده کامل کند ولی اگر rامین شکست قبل از زمان T اتفاق نیافتد، آنگاه محقق به طور طبیعی تا رسیدن به rامین شکست ادامه می‌دهد.

۲- استنباط برمبنای سانسور هیبرید نوع I

فرض کنید D تعداد واحدهایی باشد که قبل از زمان T خراب می‌شوند؛ در اینصورت D یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $\{0,1,\ldots,r\}$ و تابع جرم احتمال زیر است.

$$P_\theta(D=j)=\begin{cases}\binom{n}{j}\{F(T)\}^j\{1-F(T)\}^{n-j} & ; j=0,1,\ldots,r-1,\\ 1-\sum_{j=0}^{r-1}\binom{n}{j}\{F(T)\}^j\{1-F(T)\}^{n-j}; & j=r.\end{cases}$$

زمان کل آزمون که آن را با S نشان می دهیم به صورت زیر خواهد بود.

$$S=\begin{cases}\sum_{i=1}^{D}X_{i:n}+(n-D)T & ; \quad T<X_{r:n},\\ \sum_{i=1}^{r}X_{i:n}+(n-r)X_{r:n} & ; \quad X_{r:n}\le T.\end{cases}$$

بنابراین $\hat\theta=\frac{S}{D}$ یک برآوردگر θ است. لذا برآوردگر درستنمایی ماکسیمم به صورت زیر می‌باشد

$$\hat\theta=\begin{cases}\frac{1}{D}\left\{\sum_{i=1}^{D}X_{i:n}+(n-D)T\right\} & ; \quad T<X_{r:n}\\ \frac{1}{r}\left\{\sum_{i=1}^{r}X_{i:n}+(n-r)X_{r:n}\right\} & ; \quad X_{r:n}<T\end{cases}$$

با توجه به چن و باتاچاریا[۳] برای بدست آوردن تابع مولد گشتاور $\hat\theta$، عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$E_\theta(e^{w\hat\theta})=\sum_{d=1}^{r-1}E_\theta(e^{w\hat\theta}\mid D=d)P_{\theta,c}(D=d) \qquad (1)$$
$$+\sum_{d=r}^{n}E_\theta(e^{w\hat\theta}\mid D=d)P_{\theta,c}(D=d),$$

که $P_{\theta,c}(D=d)$ احتمال شرطی است که در آن $D\ge 1$ است و بصورت زیر تعریف می شود :

$$P_{\theta,c}(D=d)=\binom{n}{d}p^dq^{n-d}/(1-q^n).$$

در صورتیکه $T<X_{r:n}$ باشد، مقادیر D در اولین مجموع با تمام مقادیر ممکن متناظر است. مجموع دوم را برای سادگی بیشتر با $E_\theta(e^{w\hat\theta}\mid X_{r:n}\le T)P_{\theta,c}(X_{r:n}\le T)$ جانشین می‌کنیم. با داشتن پیشامد $\{X_{r:n}\le T\}$، تابع چگالی تؤام $X_{1:n},\ldots,X_{r:n}$ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$f(x_1,\ldots,x_r\mid X_{r:n}\le T)$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!P_\theta(X_{r:n}\le T)}\prod_{j=1}^{r}f(x_j)\{1-F(x_r)\}^{n-r},$$

که در آن $0<x_1<\ldots<x_r<T$. با قرار دادن مقدار $\hat\theta$ داریم :

$$E_\theta(e^{w\hat\theta}\mid X_{r:n}\le T)P_{\theta,c}(X_{r:n}\le T)$$
$$=\frac{n!}{(n-r)!(1-e^{-nT/\theta})}\int^{T}\cdots\int^{x_2}e^{w\left\{\frac{1}{r}(\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r)\right\}}$$
$$\times\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{\theta}e^{\frac{-x_j}{\theta}}\left\{1-(1-e^{\frac{-x_r}{\theta}})\right\}^{n-r}dx_1\ldots dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}\frac{n!}{(n-r)!\theta^r}$$
$$\times\int^{T}\cdots\int^{x_2}e^{w\left\{\frac{1}{r}(\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r)\right\}}e^{\frac{-\sum_{j=1}^{r}x_j}{\theta}}e^{\frac{-(n-r)x_r}{\theta}}dx_1\ldots dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}\frac{n!}{(n-r)!\theta^r}$$
$$\times\int^{T}\left[\int^{x_r}\cdots\int^{x_2}e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})\sum_{i=1}^{r-1}x_i}dx_1\ldots dx_{r-1}\right]e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+1)x_r}dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}\frac{n!}{(n-r)!\theta^r}$$
$$\times\int^{T}\left[\frac{(1-e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})x_r})^{r-1}}{(\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r}))^{r-1}(r-1)!}.e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+1)x_r}\right]dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}\frac{n!(1-\frac{\theta w}{r})^{-(r-1)}}{(n-r)!(r-1)!\theta}$$
$$\times\int^{T}\left\{1-e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})x_r}\right\}^{r-1}e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+1)x_r}dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}r\binom{n}{r}(1-\frac{\theta w}{r})^{-r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}$$
$$\int^{T}\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})e^{\frac{-k}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})x_r}e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+1)x_r}dx_r$$
$$=(1-e^{-nT/\theta})^{-1}r\binom{n}{r}(1-\frac{\theta w}{r})^{-r}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k}{n-r+k+1}$$
$$\times\binom{r-1}{k}\left\{1-e^{-(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+k+1)\frac{T}{\theta}}\right\}$$

که تساوی چهارم از رابطه زیر و دو تساوی آخر از بسط دو جمله ای عبارت $\left\{1-e^{\frac{-1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})x_r}\right\}^{r-1}$ بدست می‌آید.

$$\int_0^{x_r}\int_0^{x_{r-1}}\cdots\int_0^{x_2} e^{-a\sum_{i=1}^{r-1}x_i}\,dx_1\ldots dx_{r-1}=\frac{(1-e^{-ax_r})^{r-1}}{a^{r-1}(r-1)!}\qquad (۳)$$

اثبات :

$$\int_0^{x_r}\int_0^{x_{r-1}}\cdots\int_0^{x_2} e^{-a\sum_{i=1}^{r-1}x_i}\,dx_1\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\int_0^{x_{r-1}}\cdots\int_0^{x_2} e^{-a(x_1+\ldots+x_{r-1})}dx_1\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\int_0^{x_{r-1}}\cdots\int_0^{x_2} e^{-ax_1}e^{-ax_2}\ldots e^{-ax_{r-1}}dx_1\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\cdots\left[\int_0^{x_2} e^{-ax_1}dx_1\right]dx_2\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\cdots\left[\int_0^{x_3}\frac{1}{a}(1-e^{-ax_2})e^{-ax_2}dx_2\right]dx_3\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\cdots\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}(1-e^{-ax_3})-\frac{1}{2a}(1-e^{-2ax_3})\right)\right]dx_3\ldots dx_{r-1}$$
$$=\int_0^{x_r}\cdots\left(\frac{1}{a}\left[\frac{(1-e^{-ax_3})^2}{2a}\right]\right)dx_3\ldots dx_{r-1}$$

با ادامه این روند اثبات کامل می‌شود.□

از ترکیب آخرین عبارت با نتایجی که چن و باتاچاریا[۳] برای اولین جمله رابطه (۱) بدست آوردند، قضیه زیر نتیجه می‌شود:

قضیه۳-۱ : با در نظر گرفتن شرط $D\ge 1$، تابع مولد گشتاور $\hat{\theta}$ به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\varphi_{\hat\theta}(w)=(1-q^n)^{-1}\left[\sum_{d=1}^{r-1}\binom{n}{d}\frac{q^{(n-d)(1-\theta w/d)}}{(1-\theta w/d)^d}\times(1-q^{(1-\theta w/d)})^d+r\binom{n}{r}(1-\theta w/r)^{-r}\times\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(-1)^k}{n-r+k+1}\binom{r-1}{k}\left\{1-q^{(1-\theta w/r)(n-r+k+1)}\right\}\right];\ w<\frac{1}{\theta},$$

که در آن $q=e^{-T/\theta}$.

اثبات: با استفاده از آخرین جمله رابطه (۳) و نتایجی که چن و باتاچاریا[۳] بدست آورده اند، قضیه فوق نتیجه می‌شود. برای ملاحظه جزئیات اثبات به ضمیمه همین مقاله مراجعه کنید.

قضیه۳-۲ : با درنظر گرفتن شرط $D\ge 1$، تابع چگالی $\hat{\theta}$ به صورت زیر است :

$$f_{\hat\theta}(x)=(1-q^n)^{-1}\left[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\,g(x-T^*_{k,d};\frac{d}{\theta},d)+g(x;\frac{r}{\theta},r)+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}\times g(x-T^*_{k,r};\frac{r}{\theta},r)\right]\quad;\quad 0<x<nT\qquad (٤)$$

که در آن $C_{k,d}=(-1)^k\binom{n}{d}\binom{d}{k}q^{n-d+k}$ و $T^*_{k,d}=(n-d+k)\frac{T}{d}$ و همچنین :

$$g(x;\alpha,p)=\begin{cases}\frac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

اثبات: با استفاده از فرمول بسط دوجمله ای عبارت $(1-q^{(1-\frac{\theta w}{d})})^d$ به صورت $\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}(-1)^k q^{k(1-\frac{\theta w}{d})}$، باز کردن جمله دوم به صورت $1-q^{(1-\frac{\theta w}{r})(n-r+k+1)}$، استفاده از تساوی :

$$\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\frac{1}{n+k-r+1}=\frac{1}{r\binom{n}{r}},$$

و قرار دادن مقدار $q=e^{-\frac{T}{\theta}}$ در تابع مولد گشتاور زیر داریم

$$\varphi_{\hat\theta}(w)=(1-q^n)^{-1}\left[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}e^{w(n-d+k)\frac{T}{d}}(1-\frac{\theta w}{d})^{-d}+(1-\frac{\theta w}{r})^{-r}+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\binom{r-1}{k-1}\frac{q^{n-r+k}}{n-r+k}e^{w(n-r+k)\frac{T}{r}}(1-\frac{\theta w}{r})^{-r}\right].$$

با دانستن این مطلب که $e^{wA}(1-\frac{w}{\alpha})^{-p}$، تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $Y+A$ است که Y دارای تابع چگالی $g(x;\alpha,p)$است، اثبات کامل می‌شود.□

تذکر۳-۱: نمایش ساده شده تابع چگالی $\hat{\theta}$ در قضیه ۳-۲، نشان می‌دهد که چگونه نتایج سانسور هیبرید نوع I به نتایج سانسور نوع II قراردادی تبدیل می‌شود. در واقع اگر قرار دهیم $T\to\infty$، آنگاه $f_{\hat\theta}(x)=g(x;\frac{r}{\theta},r)$ و به نتیجه معروف $\frac{2r\hat\theta}{\theta}\sim\chi^2(2r)$ می‌رسیم که این مطلب از نکته زیر نتیجه می‌شود:

نکته۳-۱: اگر $X \sim \Gamma(n,\theta)$؛ آنگاه $2\theta X \sim \chi^2(2n)$

اثبات : در تابع چگالی فوق اگر قرار $f_{\hat{\theta}}(x)=g(x;\frac{r}{\theta},r)$ دهیم $T\to\infty$؛ آن گاه $q\to 0$ و خواهیم داشت

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\,g(-\infty;\frac{d}{\theta},d)+g(x;\frac{r}{\theta}r)$$
$$+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}g(-\infty;\frac{r}{\theta},r)\Bigg]$$

و چون تکیه گاه تابع چگالی گاما، اعداد نامنفی است؛ لذا جمله اول و آخر عبارت فوق، صفر می‌شود و به نتیجه مطلوب می‌رسیم. □

نتیجه۳-۱ : با استفاده از تابع چگالی بدست آمده در قضیه۳-۲ و با دانستن این که اگر X دارای تابع چگالی $g(x;\alpha,\beta)$ باشد، $E(X)=\frac{\beta}{\alpha}$، خواهیم داشت

$$E_{\theta}(\hat{\theta})=(1-q^n)^{-1}\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}E_{\theta}(x-T^*_{k,d})$$
$$+E_{\theta}(x)+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}E_{\theta}(x-T^*_{k,r})\Bigg]$$
$$=(1-q^n)^{-1}\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}(\theta+T^*_{k,d})+\theta$$
$$+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}(\theta+T^*_{k,r})\Bigg]$$

$$E_{\theta}(\hat{\theta}^2)$$
$$=(1-q^n)^{-1}\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\left\{\frac{\theta^2}{d}(1+d)+2T^*_{k,d}\theta+(T^*_{k,d})^2\right\}$$
$$+\frac{\theta^2}{r}(1+r)+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}$$
$$\times\left\{\frac{\theta^2}{r}(1+r)+2T^*_{k,r}\theta+(T^*_{k,r})^2\right\}\Bigg].$$

با انتگرال‌گیری از تابع چگالی مذکور در رابطه (٤)، عبارت زیر برای $P_{\theta}(\hat{\theta}>b)$ بدست می‌آید که مـی‌تـوان از آن بـرای ساختن کران پایین فاصله اطمینان برای θ استفاده کرد:

نتیجه۳-۲ :

$$P_{\theta}(\hat{\theta}>b)=$$
$$(1-q^n)^{-1}\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}\frac{C_{k,d}}{(d-1)!}\Gamma(d,A_d(T^*_{k,d}))+\frac{\Gamma(r,\frac{rb}{\theta})}{(r-1)!}$$
$$+\frac{r}{(r-1)!}\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}\Gamma(r,A_r(T^*_{k,r}))\Bigg].$$

که در آن

$\Gamma(a,z)=\int_z^{\infty}t^{a-1}e^{-t}dt$، $A_k(a)=\frac{k}{\theta}<b-a>$ و $<x>=\max\{x,0\}$ و

$$P_{\theta}(\hat{\theta}>b)=\int_b^{\infty}f_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_b^{\infty}(1-q^n)^{-1}$$
$$\times\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\,g(x-T^*_{k,d};\frac{d}{\theta},d)+g(x;\frac{r}{\theta},r)$$
$$+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}g(x-T^*_{k,r};\frac{r}{\theta},r)\Bigg]dx$$
$$=(1-q^n)^{-1}\Bigg[\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}\frac{C_{k,d}}{(d-1)!}$$
$$\times\int_b^{\infty}(\frac{d}{\theta})^d(x-T^*_{k,d})^{d-1}e^{-\frac{d}{\theta}(x-T^*_{k,d})}d(x-T^*_{k,d})$$
$$+\int_b^{\infty}\frac{(\frac{r}{\theta})^r}{(r-1)!}x^{r-1}e^{\frac{r}{\theta}x}dx+r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^k\frac{q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}$$
$$\int_b^{\infty}\frac{(\frac{r}{\theta})^r}{(r-1)!}(x-T^*_{k,r})^{r-1}e^{-\frac{r}{\theta}(x-T^*_{k,r})}d(x-T^*_{k,r})\Bigg],$$

اثبات با ادامه همین روند، با یک تغییر متغیر ساده و با توجـه به تعریف تابع چگالی گامـای نـاقص، $\Gamma(a,z)=\int_z^{\infty}t^{a-1}e^{-t}dt$، اثبات کامل می‌گردد.□

۳- استنباط بر مبنای سانسور هیبرید نوع II

در این بخش، نتایج مشابهی را برای سانسور هیبرید نوع II بدست می‌آوریم، که همانطور که قبلا تعریف کردیم آزمایش در زمان تصادفی $T_2^*=\max\{X_{r:n},T\}$ به پایان می‌رسد. همانند بخش قبل، فرض کنید D تعداد شکست هایی باشد که تا زمان T رخ می‌دهد. در اینصورت تابع درستنمایی با

استفاده از فرمول تابع چگالی احتمال توأم آماره های مرتب، عبارت است از

$$L(\theta \mid x)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!}e^{-\frac{1}{\theta}\left\{\sum_{i=1}^{r}X_i+(n-r)X_r\right\}} & ; D=0,\ldots,r-1,\\[2ex] \dfrac{n!}{(n-D)!}e^{-\frac{1}{\theta}\left\{\sum_{i=1}^{D}X_i+(n-D)T\right\}} & ; D=r,r+1,\ldots,n,\end{cases}$$

و برآوردگر درستنمایی ماکسیمم θ در این حالت عبارتست از

$$\hat{\theta}=\begin{cases}\dfrac{1}{r}\left\{\sum_{i=1}^{r}X_i+(n-r)X_r\right\}; & D=0,\ldots,r-1,\\[2ex] \dfrac{1}{D}\left\{\sum_{i=1}^{D}X_i+(n-D)T\right\}; & D=r,r+1,\ldots,n.\end{cases}$$

قضیه۴-۱ : تابع مولد گشتاور $\hat{\theta}$ به صورت زیر است :

(۵)

$$\varphi_{\hat{\theta}}(w)=(1-\frac{\theta w}{r})^{-r}\sum_{d=0}^{r-1}\binom{n}{d}q^{(n-d)(1-\frac{\theta w}{r})}\left\{1-q^{(1-\frac{\theta w}{r})}\right\}^{d}$$
$$+\sum_{d=r}^{n}\binom{n}{d}q^{(n-d)(1-\frac{\theta w}{d})}\left\{1-q^{(1-\frac{\theta w}{d})}\right\}^{d}(1-\frac{\theta w}{d})^{-d};\ w<\frac{r}{\theta}.$$

اثبات: در این حالت، D یک متغیر تصادفی دوجمله ای است و مقادیر ۰ تا n را می‌پذیرد. ابتدا روی مقادیر D شرط می‌گذاریم

$$\varphi_{\hat{\theta}}(w)=\sum_{d=0}^{r-1}E_{\theta}(e^{w\hat{\theta}}\mid D=d)P_{\theta}(D=d)$$
$$+\sum_{d=r}^{n}E_{\theta}(e^{w\hat{\theta}}\mid D=d)P_{\theta}(D=d),$$

سپس با توجه به اینکه برای $d=0,\ldots,r-1$، تابع چگالی شرطی $X_{1:n},\ldots,X_{r:n}$ به شرط $D=d$ بصورت زیر است :

$$f(x_1,\ldots x_r\mid D=d)=\frac{n!}{(n-r)!P_{\theta}(D=d)}$$
$$\times\prod_{j=1}^{r}f(x_j)\{1-F(x_r)\}^{n-r},$$

که در آن $0<x_1<\ldots<x_d<T<x_{d+1}<\ldots<x_r<\infty$.

همچنین برای $d=r,r+1,\ldots,n$، تابع چگالی شرطی $X_{1:n},\ldots,X_{d:n}$ به شرط $D=d$، بصورت زیر است :

$$f(x_1,\ldots x_d\mid D=d)=\frac{n!}{(n-d)!P_{\theta}(D=d)}$$
$$\times\prod_{j=1}^{d}f(x_j)\{1-F(T)\}^{n-d},$$

که در آن $0<x_1<\ldots<x_d<T$.

و لذا داریم :

$$\varphi_{\hat{\theta}}(w)=\frac{n!}{(n-r)!\theta^{r}}$$
$$\times\sum_{d=0}^{r-1}\int_{T}^{\infty}\ldots\int_{x_{r-1}}^{\infty}\int_{0}^{T}\ldots\int_{0}^{x_2}e^{-\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{r})\left\{\sum_{i=1}^{r}x_i+(n-r)x_r\right\}}dx_1\ldots dx_d dx_r\ldots dx_{d+1}$$
$$+\sum_{d=r}^{n}\frac{n!}{(n-d)!\theta^{d}}\int_{0}^{T}\int_{0}^{x_d}\ldots\int_{0}^{x_2}e^{-\frac{1}{\theta}(1-\frac{\theta w}{d})\left\{\sum_{i=1}^{d}x_i+(n-d)T\right\}}dx_1\ldots dx_d.$$

با یک انتگرال‌گیری ساده وقرار دادن $q=e^{-\frac{T}{\theta}}$، اثبات کامل می‌گردد.□

مشابه قضیه ۳-۲، تابع چگالی زیر برای $\hat{\theta}$ بدست می‌آید.

قضیه۴-۲ : تابع چگالی $\hat{\theta}$ به صورت زیر است

$$f_{\hat{\theta}}(x)=q^{n}g(x-\frac{nT}{r};\frac{r}{\theta},r)+\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\,g(x-a_{k,d};\frac{r}{\theta},r)$$
$$+\sum_{d=r}^{n}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\,g(x-a_{k,d};\frac{d}{\theta},d),$$

که $C_{k,d}$ و g مانند قبل تعریف می‌شوند؛ و

$$a_{k,d}=\begin{cases}(n-d+k)\dfrac{T}{r} & ;d=0,1,\ldots,r-1,\\[2ex] (n-d+k)\dfrac{T}{d} & ;d=r,r+1,\ldots,n\ ;k=0,1,\ldots,d.\end{cases}$$

تذکر۴-۱: مانند سانسور هیبرید نوع I، نتایج قضیه۴-۲ برای سانسور هیبرید نوع II، به نتایج سانسور نوع II قراردادی تبدیل می‌شوند. در واقع اگر قرار دهیم $T\to 0$، آنگاه $f_{\hat{\theta}}(x)=g(x;\frac{r}{\theta},r)$ و به نتیجه $\frac{2r\hat{\theta}}{\theta}\sim\chi^{2}(2r)$ می‌رسیم.

نتیجه۴-۱ : میانگین و واریانس $\hat{\theta}$ به صورت زیر است

$$(i)\quad E_{\theta}(\hat{\theta})=\theta+B$$
$$(ii)\quad V_{\theta}(\hat{\theta})=\theta^{2}\left[\frac{q^{n}}{r}+\frac{1}{r}\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}+\sum_{d=r}^{n}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}\frac{1}{d}\right]$$
$$+\sum_{d=0}^{n}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}a_{k,d}^{2}-B^{2},$$

که در آن

$$B=\sum_{d=0}^{n}\sum_{k=0}^{d}C_{k,d}a_{k,d}.$$

تذکر۳-۳: از نتیجه فوق در می‌یابیم که بر خلاف سانسور نوع II، $\hat{\theta}$ در این حالت، نااریب نیست. علاوه بر آن اگر قرار دهیم $T \to 0$، به نتیجه زیر خواهیم رسید

$$Var_\theta(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{r},$$
$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta.$$

(چون در این حالت $f_{\hat{\theta}}(x) = g(x; \frac{r}{\theta}, r)$)

نتیجه۳-٤: مانند نتیجه ۳-۲، برای سانسور هیبرید نوع II نیز داریم:

$$P_\theta(\hat{\theta} > b) = \sum_{d=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{d}\frac{C_{k,d}}{(r-1)!}\Gamma(r, A_r(a_{k,d}))$$
$$+\sum_{d=r}^{n}\sum_{k=0}^{d}\frac{C_{k,d}}{(d-1)!}\Gamma(d, A_d(a_{k,d})).$$

۵- مثال های تشریحی

فرض کنید $P_\theta(\hat{\theta} > b)$، یک تابع به طور یکنوا صعودی از θ باشد. یک کران اطمینان پایین $(1-\alpha)$ درصد برای θ، با حل معادله $\alpha = P_{\theta l}(\hat{\theta} > \hat{\theta}_{obs})$ برای θ_l بدست می‌آید.

به دلیل پیچیدگی شکل $P_\theta(\hat{\theta} > b)$، چن و باتاچاریا[۳] نتوانستند یکنوایی را به صورت تحلیلی ثابت کنند. اگرچه در این جا شکل ساده تری از تابع را بیان کردیم، باز هم از بیان اثبات یکنوایی عاجزیم.

مثال ۱: چن و باتاچاریا[۳]، داده های بارلو(۱۹٦۸) را در نظرگرفتند.

در داده های مذکور، ده واحد تحت آزمون قرار گرفته بودند که با در نظرگرفتن زمان سانسور

T=۵۰، نتایج زیر حاصل شده است :

۳۸، ۲۷، ۱۸، ۱۱، ۹ و ٤

آنها، با در نظرگرفتن T=۵۰،$r=4$؛ T=۵۰،$r=6$ و $r=8$، T=۵۰، از این داده ها برای بدست آوردن داده‌های سانسور شده هیبرید نوع I متناظر، استفاده کردند وکران اطمینان پایین برای θ را بدست آوردند. مجدداً محاسبات را در جدول ۱ تکرار کردیم؛ چون به نظر می‌رسد که بعضی از آن اعداد نادرست باشند.

جدول ۱: کران های اطمینان پایین θ

r	$\hat{\theta}_{obs}$	$s.e.$	$\alpha = 0/05$	$\alpha = 0/1$
٤	۳۷/۵	۱۹/۷۸	۱۹/۳۵	٤۵/٤۵
٦	٤۳/۱۷	۲۳/٦٤	۲٤/٦٤	۲۷/۹۳
۸	۵۱/۱۷	۳۱/۱۱	۲۸/٤٦	۳۲/۱۲

حال این سؤال مطرح می‌شود که اگر با یک نمونه سانسور شده هیبرید مانند یک نمونه سانسور شده نوع II معمولی رفتارکنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

از آنجایی که آنالیز داده های سانسور شده نوع II آسانتر است، معمولاً این کار انجام می‌شود. برای مثال کوهن[۵] را ببینید.

در این حالت یک کران اطمینان پایین $(1-\alpha)$ درصد برای θ با $\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{(2r,\alpha)}}$ داده می‌شود که این مطلب از تذکرهای بخش قبل نتیجه می‌شود.

برای داده های جدول۱، با در نظر گرفتن $r=6$ و $\hat{\theta}=43/167$، کران اطمینان پایین ۹۵ درصد، ۲٤/٦۳٦ و کران اطمینان پایین۹۰ درصد، ۲۷/۹۲۵ است که تا سه رقم اعشار با کرانهای اطمینان جدول۳ مطابقت دارد.

حال فرض کنید با حالت $r=8$، مانند یک نمونه سانسور شده نوع II رفتار کنیم.در اینصورت کران های اطمینان پایین حاصل، مانند حالت $r=6$ می‌شوند؛ یعنی (۲۷/۹۲۵ و ۲٤/٦۳٦).

برای محاسبه ضریب اطمینان دقیق، فرض کنید داده های یک نمونه سانسور شده هیبرید نوع I را داشته باشیم و $r=8$ باشد، به آسانی می‌توان $P_a(\hat{\theta} > \hat{\theta}_{obs})$ را که در آن $\hat{\theta}_{obs}$، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم سانسور شده هیبرید و aکران اطمینان پایین پیشنهادی است، را محاسبه کرد.

در این حالت، چون $P_{24/636}(\hat{\theta} > 51/17) = 0/178$، کران اطمینان پایین ۹۵ درصد، در حقیقت یک کران پایین ۹۸/۲۲ درصد است و کران اطمینان پایین۹۰ درصد، در حقیقت یک کران اطمینان پایین ۹۵/٦ درصد است.

همان طور که قبلا به آن اشاره شد، زمانی که $T \to \infty$، نتایج سانسور هیبرید نوع I به نتایج سانسور نوع II قراردادی

تبدیل می‌شود. بنابراین زمانی که T بزرگ است، یا به طورمعادل زمانی که به احتمال زیاد $X_{r:n} < T$ است، انتظار داریم که نتایج سانسور هیبرید نوع I به نتایج سانسور نوع II قراردادی نزدیک باشد.

در مثال بالا اگر فرض کنیم$r=6$،

$$P(X_{6:10} < 50) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} (1-e^{\frac{-50}{\theta}})^i e^{\frac{-(10-i)50}{\theta}}$$

و با فرض $\theta = \hat{\theta}$=۴۳/۱۶۷، داریم:

$$P(X_{6:10} < 50) \approx 82/5\%$$

از آنجایی که مقدار این احتمال بالاست، منطقی است که نتایج سانسور هیبرید نوع I به نتایج سانسور نوع II قراردادی نزدیک باشد.

ولی وقتی $r=8$، داریم:

$$P(X_{8:10} < 50) \approx 20/8\%$$

مقدار کم این احتمال، نشان می‌دهد که چرا کران های اطمینان پایین حاصل از نمونه سانسور شده نوع II قراردادی، سطح اطمینانی متفاوت از سطح اطمینان واقعی دارد.

مثال۲: به عنوان مثالی از طرح سانسور هیبرید نوع II، داده های بارس لومو را که در آن $n=20$ و $T=150$، را در نظر می‌گیریم. زمان های شکست زیر بدست می‌آید

۱۳۸، ۱۰۹، ۹۹، ۹۰، ۸٤، ۵۸، ٤۵، ٤۱، ۳۸، ۳۷، ۲۷، ۲٦، ۲۳، ۱۹و ۳

برای بررسی نتایج، فرض کنیم زمان سانسور،$T=50$ باشد. در این حالت، کران اطمینان پایین را برای $r=7$ و $r=15$، محاسبه می‌کنیم.

زمانی که $r=7$، آزمایش تا زمان $T=50$ ادامه می‌یابد و در نهایت ۹ شکست مشاهده می‌شود. اگر $r=15$ باشد، آزمون پس از مشاهده ۱۵- امین شکست به پایان می‌رسد.

با استفاده از نتیجه ٤-۱، برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم و انحراف معیارهای آنها محاسبه شده است و کران های اطمینان پایین در جدول۲ به صورت زیر ارائه شده است

جدول ۲: کران های اطمینان پایین θ

r	$\hat{\theta}_{obs}$	$s.e.$	$\alpha=0/05$	$\alpha=0/1$
۷	۸۹/۸۹	۳۰/۹٦	۵۳/۵٦	۵۹/۵٤
۱۵	۱۰۱/۸	۲٦/۲۸	٦۹/۷۷	۷۵/۸٦

حال فرض کنید با نمونه سانسور شده هیبرید نوع II، مانند نمونه سانسور شده نوع II قراردادی رفتار کنیم. زمانی که $r=7$ است، چون ۹ شکست مشاهده شده است، کران اطمینان پایین ۹۵ درصد برای θ، از فرمول $\frac{2r\hat{\theta}}{\chi^2_{2r,\alpha}}$، برابر $\frac{2\times 9\times 89/89}{28/8693}=56/046$ است و کران اطمینان پایین ۹۰ درصد، ٦۲/۲۵٦ خواهد شد.

از آنجایی که $P_{56.046}(\hat{\theta} > 89/89) = 0/0684$ و $P_{62.256}(\hat{\theta} > 89/89) = 0/1288$، کران اطمینان پایین ۹۵ درصد در حقیقت کران ۹۳/۱٦ درصد و کران اطمینان پایین ۹۰ درصد، در حقیقت کران اطمینان ۸۷/۱۲ درصد است.

زمانی که $r=15$، کران های اطمینان پایین ۹۵ و ۹۰ درصد، تا سه رقم اعشار با اعداد جدول ۵ مطابقت دارند.

منابع

[1]. Barlow, R. E., Madansky, A., Proschan, F. and Scheuer, E. (1968). Statistical estimation procedures for the "Burn-in" process. Technometrics, 10, 51-62.

[2]. Bartholomew, D. J. (1963). The sampling distribution of an estimate arising in life testing. Technometrics, 5, 361-374.

[3]. Chen, S. and Bhattacharyya, G. K.(1988). Exact confidence bounds under hybrid censoring for an exponential parameter. Comm. Statist. Theory Methods, 17, 1857-1870.

[4]. Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N. and Kundu, D. (2003), Exact likelihood inference based on type-I and type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. Ann. Inst. Statist. Math.55, 319-330.

[5]. Cohen, A. C. (1991). Truncated and censored samples: Theory and applications, Marcel Dekker, New York.

[6]. Cohen, A. C. (1995). MLEs under censoring and truncation and inference, The exponential distribution: Theory, methods and applications (eds. N. Balakrishnan and A. P. Basu), 33-51, Gordon and Breach, Amsterdam.

[7]. Epstein, B. (1954). Truncated life tests in the exponential case, Ann. Math. Statist., 25, 555-564.